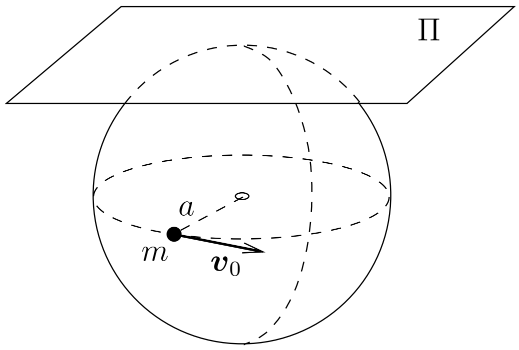
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (30 de octubre de 2002)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Una partícula material pesada de masa m está obligada a moverse sobre una esfera fija de radio a con ligadura bilateral lisa.
Además del peso actúa una fuerza atractiva hacia un plano fijo Π, que es tangente a la esfera en su punto más elevado. Esta fuerza es proporcional a la distancia, siendo $k = 2mg/a$ la constante de proporcionalidad.
En el instante inicial el punto m se sitúa sobre el ecuador de la esfera con una velocidad inicial $v_0 = \sqrt{2ga}$ horizontal.

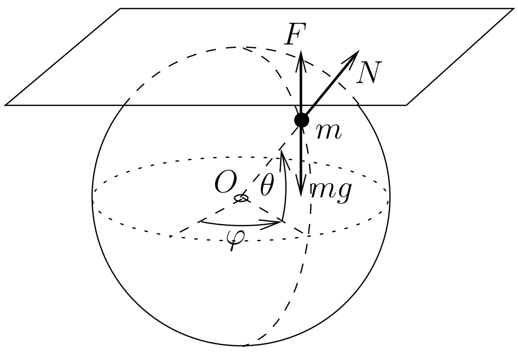


Se pide:

1. Expresión de las ecuaciones diferenciales del movimiento de la partícula.
2. Reducir las ecuaciones del apartado anterior a cuadraturas.
3. Expresión de la reacción de la esfera sobre la partícula en un instante genérico.
4. Expresión que permitiría calcular los paralelos entre los que se desarrolla el movimiento.

---

1. La posición de la partícula sobre la esfera queda totalmente determinada mediante las dos coordenadas esféricas (φ, θ) que muestra la figura adjunta.
El efecto de la fuerza atractiva es totalmente equivalente a la acción de un muelle vertical situado entre la partícula y el plano Π, con una fuerza de módulo $F = ka(1 - \operatorname{sen}\theta)$



Puesto que la superficie es lisa y tanto el peso como la fuerza atractiva son conservativas, la energía total se conserva:

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + mga\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}ka^2(1-\operatorname{sen}\theta)^2$$
$$= E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}ka^2$$

donde se ha tomado como origen de potencial gravitatorio el plano ecuatorial. Teniendo en cuenta que la velocidad de la partícula se expresa en coordenadas esféricas como $\boldsymbol{v} = a\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + a\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_\varphi$, y sustituyendo los valores de k y v_0 que proporciona el enunciado, se obtiene:

$$\frac{1}{2}ma^2\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\cos^2\theta\right) + mga\operatorname{sen}\theta + \frac{1}{2}\frac{2mg}{a}a^2(1-\operatorname{sen}\theta)^2 = \frac{1}{2}m2ga + \frac{1}{2}\frac{2mg}{a}a^2;$$

y simplificando,

$$\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2\theta + \frac{2g}{a}(1 + \operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta) = \frac{4g}{a}. \tag{1}$$

Por otro lado, la componente vertical del momento respecto del centro O de la esfera de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula es nulo (el peso y la fuerza atractiva son verticales, y la reacción corta a la vertical que pasa por O). En consecuencia, la componente vertical del momento cinético en O de la partícula es constante:

$$\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} = (\boldsymbol{r} \wedge m\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{K} = cte.$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{v} = a\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + a\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{u}_\varphi, \boldsymbol{K} = \cos\theta\boldsymbol{u}_\theta + \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{u}_r$, y que inicialmente el momento cinético de la partícula vale $(mav_0\boldsymbol{K})$, se obtiene:

$$\boldsymbol{H}_O \cdot \boldsymbol{K} = ma^2\dot{\varphi}\cos^2\theta = mav_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{\varphi} = \frac{v_0}{a\cos^2\theta} = \sqrt{\frac{2g}{a}}\frac{1}{\cos^2\theta} \tag{2}$$

Las expresiones (1) y (2) son las dos ecuaciones diferenciales del movimiento de la partícula.

2. Sustituyendo el valor de $\dot{\varphi}$ dado por la expresión (2) en (1) se obtiene:

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{a}\left(\cos^2\theta - \frac{1}{\cos^2\theta} + \operatorname{sen}\theta\right) \tag{3}$$

Las expresiones (2) y (3) permiten calcular las ecuaciones horarias del movimiento mediante sendas cuadraturas:

$$t(\theta) = \sqrt{\frac{a}{2g}}\int_0^\theta \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\sqrt{\cos^2\vartheta - \frac{1}{\cos^2\vartheta} + \operatorname{sen}\vartheta}} \qquad \Rightarrow \qquad \theta(t); \tag{4}$$

$$\varphi(t) = \sqrt{\frac{2g}{a}}\int_0^t \frac{\mathrm{d}\xi}{\cos^2\theta(\xi)}.$$

3. Para calcular la reacción N planteamos el principio de la cantidad de movimiento en dirección radial:

$$ka(1 - \operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta + N - mg\operatorname{sen}\theta = ma_r = -ma(\dot{\varphi}^2\cos^2\theta + \dot{\theta}^2) \tag{5}$$

Introduciendo en (5) las expresiones (2) y (3) se obtiene la expresión de la reacción en función exclusivamente de θ:

$$N = mg(-2 + 4\operatorname{sen}^2\theta - 3\operatorname{sen}\theta)$$

donde $\theta = \theta(t)$ podría obtenerse de la cuadratura (4).

4. Los paralelos entre los que se desarrolla el movimiento son aquellos en que $\theta(t)$ es extremo ($\dot{\theta} = 0$), por lo que con la ayuda de la expresión (3) el cálculo se reduce a la obtención de las soluciones de la ecuación:

$$\cos^2\theta - \frac{1}{\cos^2\theta} + \operatorname{sen}\theta = 0 \tag{6}$$

Aunque queda fuera de las pretensiones del enunciado, es interesante obtener una idea cualitativa de la región definida por la ecuación (6). Realizando en ella el cambio $u = \operatorname{sen}\theta$ se obtiene:

$$u^4 - u^3 - 2u^2 + u = 0$$

que tiene una primera solución ($u = 0 \Rightarrow \theta = 0$). Existen además otras tres soluciones dadas por la ecuación $f(u) = u^3 - u^2 - 2u + 1 = 0$. Puede comprobarse que sólo una de ellas se encuentra en el intervalo $[-1, 1]$ (que es la que tiene sentido físico), ya que $f(1) < 0$, $f(-1) > 0$, y además $f(u \to \infty) \to \infty$ y $f(u \to -\infty) \to -\infty$, como se muestra en la Figura 1. Esta solución $u \in [-1, 1]$ puede obtenerse de forma numérica, resultando $u = 0{,}445 \Rightarrow \theta = 26{,}42°$. Por tanto, el movimiento se desarrolla entre el ecuador ($\theta = 0$) y este paralelo ($\theta = 26{,}42°$).

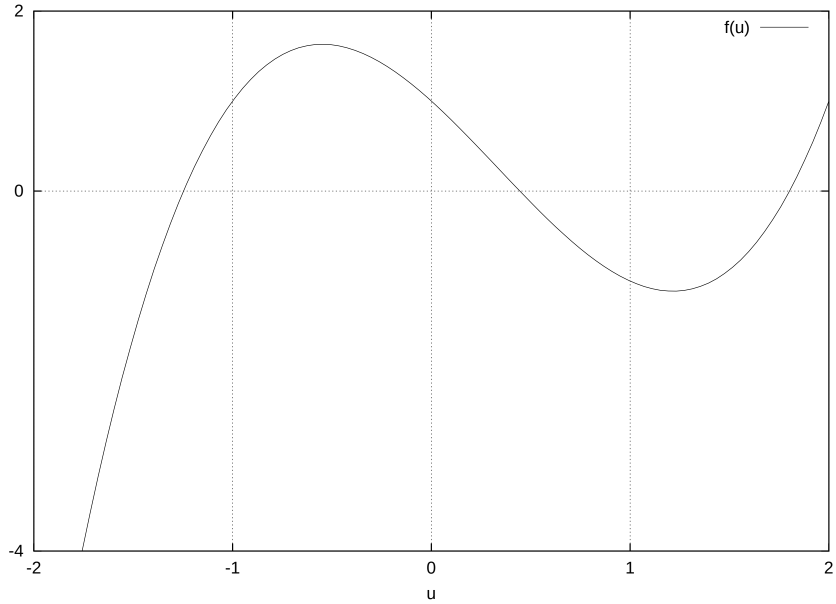


Figura 1: *Gráfico de* $f(u) = u^3 - u^2 - 2u + 1$