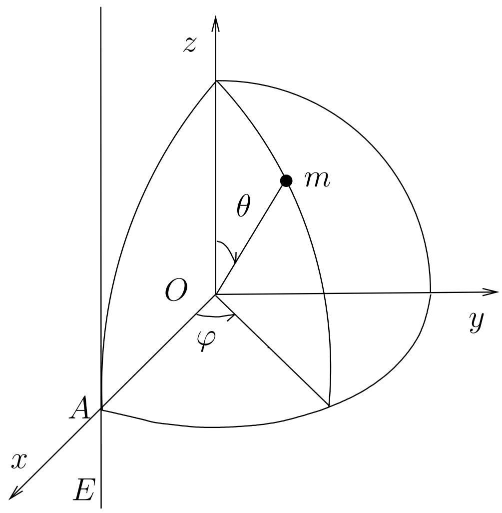
# Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO C ( 5 de noviembre de 2002)

| *Apellidos* | *Nombre* | *N.º* | *Grupo* |
|---|---|---|---|
| | | | |

Un punto material $M$, de masa $m$, sin peso, se mueve sin rozamiento sobre una esfera de centro $O$ y radio $a$. La recta $E$, tangente a la esfera por $A$, repele al punto material con una fuerza proporcional al producto de la masa del punto por la distancia que lo separa de dicha recta. El coeficiente de proporcionalidad es $\omega^2$, siendo $\omega$ una constante conocida.

Se elegirá un triedro $Oxyz$ cuyo origen es el centro de la esfera y de forma que el eje $Ox$ pasa por $A$, siendo $Oz$ paralelo a la recta $E$. Se utilizarán los ángulos $\theta$ y $\varphi$ de la figura para determinar la posición del punto sobre la esfera.




Se pide:

1. Determinar, en función de $\theta$ y $\varphi$, la función potencial de la que deriva la fuerza repulsiva.
2. Plantear las ecuaciones que determinan el movimiento del punto.
3. Estudiar la posibilidad de que, para unas condiciones iniciales, el punto describa círculos máximos.
4. Determinar la zona del movimiento en el caso en que el punto material se situe inicialmente en el punto diametralmente opuesto al $A$ y se le lance con una velocidad $v_o = \omega a\sqrt{2}$, tangente al círculo máximo que pasa por el eje $Oy$.

---

**1.** La fuerza repulsiva se puede expresar:

$$\boldsymbol{F} = m\omega^2[-(a-x)\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}]$$

Se puede comprobar fácilmente que se trata de una fuerza que deriva de una función potencial:

$$V = -\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -m\omega^2\int[-(a-x)dx + ydy] = -\frac{m\omega^2}{2}[(a-x)^2 + y^2]$$

$$\boxed{V = -\frac{ma^2\omega^2}{2}(\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + 1)}$$

**2.** Se trata del movimiento de una partícula en una superficie por lo que la posición queda perfectamente determinada mediante 2 grados de libertad $\theta$ y $\varphi$. Las dos ecuaciones del movimiento resultantes:

1. Conservación de la Energía: $E = T + V$

2. Ecuación del momento cinético respecto al eje $Oz$: $\dfrac{dH_z}{dt} = M_z$

La ventaja del empleo de esta segunda ecuación es que el momento de la reacción respecto al eje $z$ es nulo. Sabiendo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= a\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + a \operatorname{sen}\theta\dot{\varphi}\boldsymbol{u}_\varphi \\
M_z &= (\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k} = m\omega^2 a^2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\
H_z &= (\boldsymbol{r} \wedge m\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{k} = ma^2\dot{\varphi}\operatorname{sen}^2\theta
\end{aligned}$$

De este modo, las ecuaciones resultan:

$$E = \frac{1}{2}ma^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\operatorname{sen}^2\theta) - \frac{ma^2\omega^2}{2}(\operatorname{sen}^2\theta - 2\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + 1) \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}(ma^2\dot{\varphi}\operatorname{sen}^2\theta) = m\omega^2 a^2 \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \tag{2}$$

**3.** Los círculos máximos son las curvas geodésicas de la esfera. Para que el punto $M$ describa como trayectoria una de estas curvas es necesario que todas las fuerzas exteriores que actúen sobre la misma estén contenidas en el plano que define dicho círculo máximo. En estas condiciones, los únicos círculos máximos que pasan por $A$ y que la fuerza $\boldsymbol{F}$ esté contenida en su plano son los definidos para $\varphi = 0$ (meridiano que contiene a $E$) y $\theta = \pi/2$ (ecuador).

**4.** Dadas las condiciones iniciales describirá el círculo máximo $\theta = \pi/2$. La ecuación (1) resulta

$$\dot{\varphi}^2 + 2\omega^2\cos\varphi = 0.$$

La compatibilidad de esta ecuación exige que sea $\cos\varphi < 0$, como es fácil ver. Por tanto el movimiento tiene lugar en el intervalo $\varphi \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$. A partir de la ecuación anterior, el movimiento puede reducirse a una cuadratura,

$$t = \frac{1}{\omega\sqrt{2}}\int_\pi^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{-\cos\varphi}}.$$