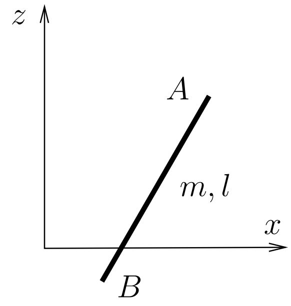
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (14 de enero de 2003)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Una barra pesada AB de masa m y longitud l se mueve en todo momento contenida en un plano vertical fijo, de forma que las coordenadas (x, z) del extremo A verifican en todo momento la relación $z = x \operatorname{tg} \alpha$, con $\alpha = cte$.



Se pide:

1. Establecer el número de grados de libertad del sistema.
2. Ecuaciones diferenciales que describen el movimiento de la barra.
3. Suponiendo que la barra inicialmente está en reposo, obtener el ángulo que inicialmente debe formar la barra con la vertical para que el movimiento posterior sea una traslación pura.

---

1. La configuración de la barra queda unívocamente determinada por las coordenadas de uno de sus puntos y el ángulo que forma con alguna dirección fija. Como adicionalmente se impone una ecuación de restricción, el número de grados de libertad es dos.

2. Una manera sencilla de obtener las ecuaciones del movimiento es seleccionar como parámetros independientes una de las coordenadas del extremo A (x) y el ángulo θ que forma la barra con la vertical, ya que al ser la ligadura holónoma es posible eliminar la otra coordenada de A $(z = x \operatorname{tg} \alpha)$. Con este razonamiento, la velocidad del centro de masa G se expresa como:

$$x_G = x - \frac{l}{2} \operatorname{sen} \theta \quad , \qquad z_G = \underbrace{x \operatorname{tg} \alpha}_{z} - \frac{l}{2} \cos \theta \tag{1}$$

Empleando las expresiones (1) se obtiene la Lagrangiana del sistema:

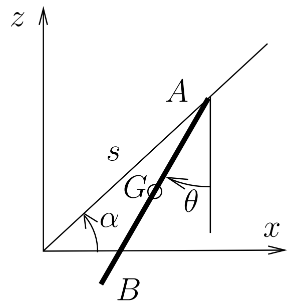
$$\begin{aligned} L(x, \theta) = T - V &= \frac{1}{2} m \left(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g z_G \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{x}^2}{\cos^2 \alpha} + l \dot{x} \dot{\theta} (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \theta - \cos \theta) \right) + \frac{1}{6} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g \left(x \operatorname{tg} \alpha - \frac{l}{2} \cos \theta \right) \end{aligned}$$

y las correspondientes ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{m}{\cos^2 \alpha} \ddot{x} + \frac{1}{2} m l \ddot{\theta} (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \theta - \cos \theta) + \frac{1}{2} m l \dot{\theta}^2 (\operatorname{tg} \alpha \cos \theta + \operatorname{sen} \theta) + m g \operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\theta} + \frac{1}{2} m l \ddot{x} (\operatorname{tg} \alpha \operatorname{sen} \theta - \cos \theta) + m g \frac{l}{2} \operatorname{sen} \theta = 0$$

Otra posible estrategia es seleccionar dos coordenadas independientes que verifiquen de forma automática la ligadura impuesta al extremo A. Esto es posible teniendo en cuenta que la expresión $z = x \operatorname{tg}\alpha$ equivale a imponer que el extremo A se mueva a lo largo de una recta fija lisa que forma un ángulo α con el eje horizontal. Eligiendo como coordenadas generalizadas la distancia s al origen del punto A y el ángulo que forma la barra con la vertical se puede obtener una Lagrangiana alternativa:



$$L(s,\theta) = \frac{1}{2}m\left(\dot{s}^2 - l\dot{s}\dot{\theta}\cos(\theta+\alpha)\right) + \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 - mg\left(s\,\mathrm{sen}\,\alpha - \frac{l}{2}\cos\theta\right)$$

y sus correspondientes ecuaciones de Lagrange, que resultan algo más sencillas que las obtenidas previamente.

$$m\ddot{s} - \frac{1}{2}ml\ddot{\theta}\cos(\theta+\alpha) + \frac{1}{2}ml\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}(\theta+\alpha) + mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{1}{3}ml\ddot{\theta} - \frac{1}{2}m\ddot{s}\cos(\theta+\alpha) + \frac{1}{2}mg\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \qquad (3)$$

Cabría reseñar una tercera forma de resolver el problema, empleando las tres coordenadas (x, z, θ) e introduciendo un multiplicador de Lagrange para tener en cuenta la restricción sobre A. Aunque este procedimiento es un poco más laborioso, tiene la ventaja de proporcionar de forma automática la fuerzas de reacción en el extremo A, aunque esto no se pide en el enunciado.

3. Si el movimiento es una traslación pura se verifica $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$, que sustituido en las ecuaciones del movimiento (2) y (3) proporcionan las expresiones:

$$\ddot{s} + g\,\mathrm{sen}\,\alpha = 0$$
$$\ddot{s}\cos(\theta+\alpha) - g\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

en las que podemos eliminar $\ddot{s}$ y obtener una relación entre θ y α:

$$\mathrm{sen}\,\alpha\cos(\theta+\alpha) = -\,\mathrm{sen}\,\theta \quad ,$$

que resuelta proporciona $\theta = -\alpha$.

Este resultado puede interpretarse de una forma simple a la luz de los principios de Newton-Euler. El principio del momento cinético en G para el caso de la traslación pura establece que el momento de la fuerza de reacción ($\boldsymbol{R}_A$) respecto de G debe ser nulo:

$$\frac{\mathrm{d}H_G}{\mathrm{d}t} = I_G\ddot{\theta} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad M_G = 0$$

por lo que esta fuerza de reacción $\boldsymbol{R}_A$ debe encontrarse alineada con la barra. Como la restricción equivale a suponer que el extremo A desliza sin rozamiento sobre una recta fija de pendiente ($\operatorname{tg}\alpha$), la reacción de ésta necesariamente se encuentra dirigida en dirección perpendicular a la recta. Por tanto, la única posibilidad es que la barra se mueva permaneciendo perpendicular a la recta fija, de forma que $\theta = -\alpha$.