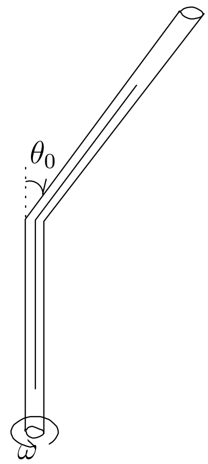
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO C (14 de enero de 2003)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Una cuerda muy flexible de longitud a y de densidad lineal λ puede deslizar sin fricción por el interior de un tubo doblado, como se muestra en la figura, que forma un ángulo θ_0 con la vertical. Dicho tubo gira con una velocidad angular constante ω.



Se pide:

1. Determinar el número de grados de libertad del sistema.
2. Calcular las ecuaciones diferenciales del movimiento.
3. Discutir la existencia de integrales primeras y en el caso de existir calcularlas.

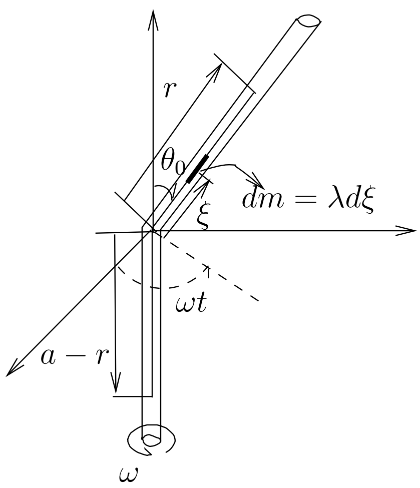
1.— Admitiendo que la cuerda es inextensible, su posición queda determinada conociendo la posición relativa de uno de sus puntos con respecto al tubo. Dicha posición queda definida mediante un solo parámetro, por lo que el sistema posee 1 gdl. Se adopta la longitud r del extremo superior del hilo con respecto al codo como grado de libertad.

2.— El movimiento se define a través de una única ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \ .$$

La velocidad del hilo relativa al tubo es en todos los puntos $\dot{r}$. Sin embargo, en el tramo inclinado hay que agregar la componente de arrastre debida a la rotación ω. Para un punto de este tramo que dista ξ del codo, el cuadrado de la velocidad es:

$$v^2 = \dot{r}^2 + \omega^2 \xi^2 \operatorname{sen}^2 \theta_0 \ .$$



De este modo la energía cinética resulta:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\int_0^r (\dot{r}^2 + \omega^2\xi^2 \operatorname{sen}^2\theta_0)\lambda d\xi + \frac{1}{2}\lambda(a-r)\dot{r}^2 \\ &= \frac{1}{2}\lambda a \dot{r}^2 + \frac{1}{6}\omega^2 \lambda r^3 \operatorname{sen}^2 \theta_0 \end{aligned}$$

Por su parte, la energía potencial es:

$$V = -\lambda(a-r)g\frac{(a-r)}{2} + \lambda r g \frac{r}{2}\cos\theta_0 \ ,$$

resultando como función lagrangiana $L = T - V$ la siguiente expresión:

$$L = \frac{1}{2}\lambda a\dot{r}^2 + \frac{1}{6}\omega^2\lambda r^3 \operatorname{sen}^2\theta_0 + \lambda g\frac{(a-r)^2}{2} - \lambda g\frac{r^2}{2}\cos\theta_0 \ .$$

La ecuación diferencial del movimiento es por tanto:

$$\boxed{\lambda a\ddot{r} - \frac{\lambda}{2}\omega^2 r^2 \operatorname{sen}^2\theta_0 + \lambda r g(\cos\theta_0 - 1) + \lambda a g = 0\ .}$$

3.— En este caso la función lagrangiana no depende explícitamente del tiempo ($\partial L/\partial t = 0$), por lo que la integral de Jacobi constituye una integral primera del movimiento.

$$h = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\dot{r} - L = \text{cte}\ ;$$

$$\boxed{h = \frac{1}{2}\lambda a\dot{r}^2 - \frac{1}{6}\omega^2\lambda r^3 \operatorname{sen}^2\theta_0 - \lambda g\frac{(a-r)^2}{2} + \lambda g\frac{r^2}{2}\cos\theta_0\ .}$$

Se puede comprobar que $h \neq T + V$, dado que la coordenada r se define mediante un sistema de coordenadas móviles, por lo que en este caso no se conserva la energía.

$$T + V = \frac{1}{2}\lambda a\dot{r}^2 + \frac{1}{6}\omega^2\lambda r^3 \operatorname{sen}^2\theta_0 - \lambda g\frac{(a-r)^2}{2} + \lambda g\frac{r^2}{2}\cos\theta_0 \neq \text{cte.}$$