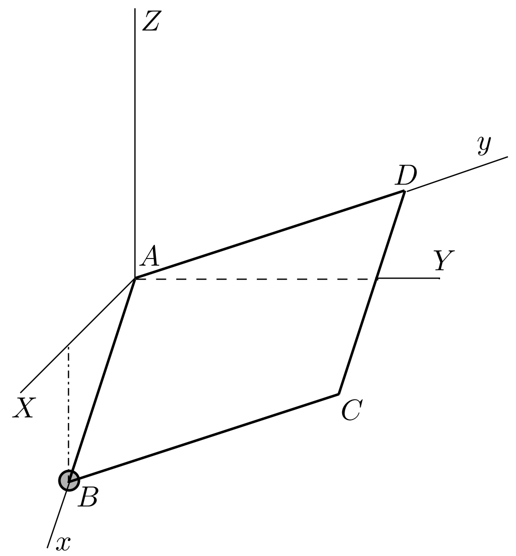
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (21 de Marzo de 2003)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Una placa cuadrada homogénea de lado a y masa m cae bajo la acción de la gravedad de forma que el vertice A permanece fijo y el vértice B siempre permanece en el plano vertical AXZ.
Se consideran dos sistemas de referencia: uno fijo (XYZ) y uno móvil solidario a la placa (xyz) de manera que en todo momento x coincide con la arista AB y el eje z es perpendicular al plano de la placa por A.
Se pide:



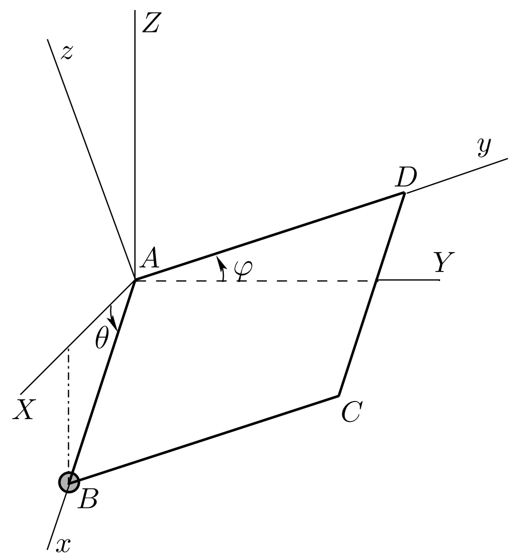
1. Calcular el tensor de inercia $\boldsymbol{I}_A$ expresando sus componentes en el triedro del cuerpo (xyz)
2. Expresión de la velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$ de la placa en una posición genérica, referida a los ejes xyz
3. Expresión del momento cinético $\boldsymbol{H}_A$ y de su derivada absoluta respecto del tiempo en una posición genérica, referidos a los ejes xyz
4. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
5. Razonar sobre la existencia de integrales primeras del movimiento, escribiéndolas en el caso de que existan

---

1. El tensor de inercia es:

$$\boldsymbol{I}_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}ma^2 & -\frac{1}{4}ma^2 & 0 \\ -\frac{1}{4}ma^2 & \frac{1}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}ma^2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

2. Para expresar el vector velocidad angular consideramos los parámetros θ y φ de la figura, correspondientes a los dos grados de libertad del sistema (nótese que el eje y no está contenido en el plano fijo AYZ).



Denominando $\{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}, \boldsymbol{K}\}$ a los versores del sistema de referencia XYZ, e $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ a los del sistema xyz, la velocidad angular es: $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{i} + \dot{\theta}\boldsymbol{J}$. Expresando el versor $\boldsymbol{J}$ en el triedro móvil: $\boldsymbol{J} = \cos\varphi\boldsymbol{j} - \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{k}$, resulta finalmente:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{i} + \dot{\theta}\cos\varphi\boldsymbol{j} - \dot{\theta}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{k} \tag{2}$$

3. Con las expresiones (1) y (2), el momento cinético en A es:

$$\boldsymbol{H}_A = \boldsymbol{I}_A\boldsymbol{\Omega} = ma^2\left[\left(\frac{1}{3}\dot{\varphi} - \frac{1}{4}\dot{\theta}\cos\varphi\right)\boldsymbol{i} + \left(-\frac{1}{4}\dot{\varphi} + \frac{1}{3}\dot{\theta}\cos\varphi\right)\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\dot{\theta}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{k}\right] \tag{3}$$

Teniendo en cuenta que el sistema móvil en el que está expresado $\boldsymbol{H}_A$ en (3) gira con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$, la derivada absoluta se obtiene mediante:

$$\frac{d\boldsymbol{H}_A}{dt} = \left(\frac{d\boldsymbol{H}_A}{dt}\right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\Omega}\wedge\boldsymbol{H}_A = ma^2\left[\left(\frac{1}{3}\ddot{\varphi} - \frac{1}{4}\ddot{\theta}\cos\varphi - \frac{1}{3}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\right)\boldsymbol{i} + \right.$$
$$\left.\left(\frac{1}{3}\ddot{\theta}\cos\varphi - \frac{1}{4}\ddot{\varphi} + \frac{1}{4}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{1}{4}\dot{\theta}^2\cos^2\varphi - \frac{2}{3}\ddot{\theta}\operatorname{sen}\varphi - \frac{2}{3}\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{4}\dot{\varphi}^2\right)\boldsymbol{k}\right] \tag{4}$$

4. Las ecuaciones diferenciales del movimiento se obtienen aplicando el teorema del momento cinético en A (ecuaciones de Euler). Para ello es necesario expresar en el triedro móvil el momento en A del peso de la placa y de la reacción en el vértice B:

$$\boldsymbol{M}_A = \boldsymbol{AG}\wedge(-mg\boldsymbol{K}) + \boldsymbol{AB}\wedge R_B\boldsymbol{J} = -\frac{mga}{2}\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{i} + \left[\frac{mga}{2}\cos\theta\cos\varphi + R_B a\operatorname{sen}\varphi\right]\boldsymbol{j} +$$
$$\left[\frac{mga}{2}(-\cos\theta\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\theta) + R_B a\cos\varphi\right]\boldsymbol{k} \tag{5}$$

donde se ha considerado:

$$\boldsymbol{AG} = a/2(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) \tag{6}$$
$$\boldsymbol{AB} = a\boldsymbol{i} \tag{7}$$
$$\boldsymbol{K} = -\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j} + \cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{k} \tag{8}$$

Igualando las componentes de (4) y (5):

$$-\frac{g}{2a}\cos\theta\cos\varphi = \frac{1}{3}\ddot{\varphi} - \frac{1}{4}\ddot{\theta}\cos\varphi - \frac{1}{3}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi \tag{9}$$
$$\frac{mg}{2a}\cos\theta\cos\varphi + \frac{R_B}{a}\operatorname{sen}\varphi = m\left(\frac{1}{3}\ddot{\theta}\cos\varphi - \frac{1}{4}\ddot{\varphi} + \frac{1}{4}\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\right) \tag{10}$$
$$\frac{mg}{2a}(-\cos\theta\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\theta) + \frac{R_B}{a}\cos\varphi = m\left(\frac{1}{4}\dot{\theta}^2\cos^2\varphi - \frac{2}{3}\ddot{\theta}\operatorname{sen}\varphi - \frac{2}{3}\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{4}\dot{\varphi}^2\right) \tag{11}$$

5. La única integral primera del movimiento, con estas coordenadas, es la conservación de la energía total, ya que la única fuerza que trabaja (el peso) es conservativa:

$$T + V = \frac{1}{6}ma^2\left[\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2(1 + \operatorname{sen}^2\varphi) - 3/2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\varphi\right] - \frac{mga}{2}(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\operatorname{sen}\varphi) = E \text{ (cte)} \tag{12}$$