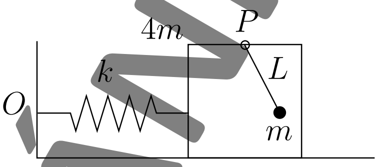
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (30 de abril de 2003)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Un péndulo simple, constituído por una masa m que cuelga de un hilo sin masa de longitud L, está suspendido de un punto P de una caja hueca de masa $4m$. La caja, a su vez, está unida a un punto fijo O a través de un resorte de constante k, y se mueve en todo momento sobre una recta horizontal fija y lisa.



Se pide:

1. Obtener las matrices de masa y rigidez, correspondientes a los pequeños movimientos alrededor de la posición de equilibrio estable, directamente a partir de las expresiones de la energía cinética T y el potencial de las fuerzas activas V en una posición genérica;

2. Obtener las mismas matrices linealizando las correspondientes ecuaciones de Lagrange para pequeñas oscilaciones;

3. Obtener las frecuencias propias de oscilación y las coordenadas normales para el caso $k/m = 6g/L$.

---

1. Se trata de un sistema con dos grados de libertad, que podemos representar mediante el desplazamiento x de la caja medido desde la longitud natural del muelle y el ángulo θ que forma el péndulo con la vertical. Como es fácil de comprobar, existe una única posición de equilibrio estable definida por $(x = 0, \theta = 0)$.

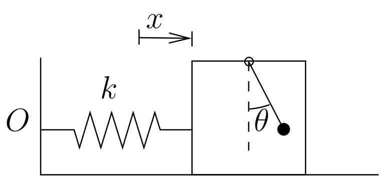


Figura 1: *Definición de los grados de libertad seleccionados.*

Es posible obtener la matriz de masas $\mathbf{M}$ directamente teniendo en cuenta que la energía cinética T es homogénea de orden 2 en las velocidades generalizadas:

$$T = \frac{1}{2}4m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}L\dot{\theta}\cos\theta\right)$$

En este caso la matriz de masas coincide con la que define la forma cuadrática definida positiva T, particularizada en la posición de equilibrio estable (denotada por el subíndice 0):

$$M_{ij} = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right|_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5m & mL \\ mL & mL^2 \end{pmatrix}$$

donde se ha denotado $q_1 = x, q_2 = \theta$.

La matriz de rigidez coincide con la matriz Hessiana del potencial de las fuerzas activas $V = (1/2)kx^2 - mgL\cos\theta$ particularizada en la posición de equilibrio estable:

$$K_{ij} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & mgL \end{pmatrix}$$

2. La Lagrangiana del sistema tiene la expresión:

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m(5\dot{x}^2 + L^2\dot{\theta}^2 + 2\dot{x}L\dot{\theta}\cos\theta) + mgL\cos\theta - \frac{1}{2}kx^2 \quad ,$$

de la que se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{aligned} 5m\ddot{x} + mL\ddot{\theta}\cos\theta - mL\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta + kx = 0 \\ mL^2\ddot{\theta} + m\ddot{x}L\cos\theta + mgL\operatorname{sen}\theta = 0 \end{aligned}$$

que linealizadas alrededor de la posición $(x = 0, \theta = 0)$ resultan:

$$\begin{aligned} 5m\ddot{x} + mL\ddot{\theta} + kx = 0 \\ mL\ddot{x} + mL^2\ddot{\theta} + mgL\theta = 0 \end{aligned}$$

de las que se deducen unas matrices de masa y rigidez que coinciden con las obtenidas en el primer apartado.

3. La ecuación característica tiene la expresión:

$$|-\lambda\mathbf{M} + \mathbf{K}| = 0 = 4\lambda^2 - \lambda\left(\frac{5g}{L} + \frac{k}{m}\right) + \frac{gk}{mL}$$

que particularizada para $k/m = 6g/L$ resulta:

$$\lambda^2 - \lambda\frac{11}{4}\frac{g}{L} + \frac{3}{2}\left(\frac{g}{L}\right)^2 = 0 \ ,$$

de la que se deducen las frecuencias propias:

$$\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{2g}{L}} \quad , \qquad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{3g}{4L}}$$

y los modos propios:

$$\mathbf{v}_1 = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -2/L \end{array} \right\} \quad , \qquad \mathbf{v}_2 = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 3/L \end{array} \right\}$$

La matriz modal se expresa por tanto como:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2/L \\ 1 & 3/L \end{pmatrix} \ ,$$

y las coordenadas normales se obtienen a partir de las geométricas:

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}^{-\mathbf{T}}\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 3/5 & -L/5 \\ 2/5 & L/5 \end{pmatrix}\mathbf{q} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} u_1 = \dfrac{3}{5}x - \dfrac{L}{5}\theta \\ \\ u_2 = \dfrac{2}{5}x + \dfrac{L}{5}\theta \end{cases}$$