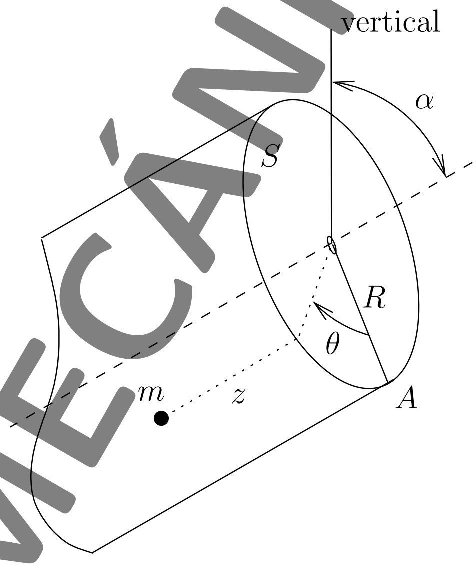
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (29 de octubre de 2003)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Una partícula pesada de masa m se mueve sin rozamiento con ligadura bilateral sobre una superficie cilíndrica de revolución de radio R cuyo eje forma un ángulo α con la vertical.
Para fijar la posición de la partícula sobre la superficie, consideramos una sección recta S de la misma, donde A es el punto más bajo de ella. La posición de la partícula queda entonces determinada mediante los parámetros θ y z representados en la figura.

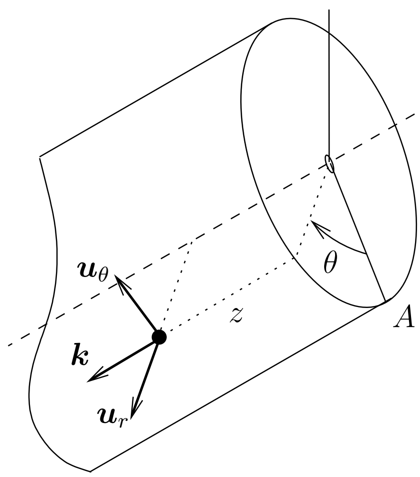


Se pide:

1. Expresión de las ecuaciones diferenciales de orden 2 del movimiento de la partícula;
2. Reducir las ecuaciones del apartado anterior a cuadraturas;
3. Discutir los distintos tipos de movimientos que pueden presentarse según los valores de $\dot{\theta}_0$ si la partícula se lanza desde $\theta_0 = \pi/2$.

---

1. Las ecuaciones dinámicas de orden 2 pueden obtenerse del planteamiento del principio de cantidad de movimiento en la base natural $(\boldsymbol{u}_r, \boldsymbol{u}_\theta, \boldsymbol{k})$ del sistema de coordenadas cilíndricas, como muestra la Figura adjunta.
Las fuerzas que actúan sobre la partícula son la reacción $\boldsymbol{N} = N\boldsymbol{u}_r$ perpendicular al cilindro y el peso $\boldsymbol{P}$. Las componentes de este último se obtienen fácilmente mediante sus proyecciones sobre una sección recta y según el eje del cilindro, resultando:



$$\boldsymbol{P} = mg \operatorname{sen}\alpha(\cos\theta \boldsymbol{u}_r - \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{u}_\theta) + mg\cos\alpha \boldsymbol{k}$$

Igualando las distintas componentes de las fuerzas a las de la aceleración en cilíndricas (con $r = R, \dot{r} = 0$) se obtienen las ecuaciones del movimiento:

$$mg \operatorname{sen}\alpha\cos\theta + N = -mR\dot{\theta}^2 \quad (1)$$
$$-mg \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta = mR\ddot{\theta} \quad (2)$$
$$mg\cos\alpha = m\ddot{z} \quad (3)$$

De estas ecuaciones se deduce que el movimiento de la partícula es la superposición de un movimiento uniformemente acelerado según $\boldsymbol{k}$ dado por la ecuación (3) y un movimiento pendular en θ expresado por la ecuación (2). Por último, la ecuación (1) serviría para obtener el valor de la reacción N.

2. La ecuación (3) puede integrarse dos veces para obtener $z(t)$:

$$z(t) = \frac{1}{2} g \cos\alpha \; t^2 + \dot{z}_0 t + z_0$$

Por otro lado, multiplicando la ecuación (2) por $\dot{\theta}$ se obtiene una integral primera:

$$mR\ddot{\theta}\dot{\theta} + mg \operatorname{sen}\alpha (\operatorname{sen}\theta)\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R} \operatorname{sen}\alpha (\cos\theta - \cos\theta_0) + \dot{\theta}_0^2 \ , \tag{4}$$

que se puede resolver mediante la cuadratura:

$$t = \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\frac{2g}{R} \operatorname{sen}\alpha (\cos\xi - \cos\theta_0) + \dot{\theta}_0^2}} \qquad \Longrightarrow \qquad t(\theta) \ ,$$

que puede proporcionar finalmente la otra ecuación horaria $\theta(t)$.

3. Para caracterizar los distintos tipos de movimiento estudiamos el rango de variación de θ en función de $\dot{\theta}_0$, puesto que $z(t)$ está no acotada para $\dot{z}_0 \neq 0$. Los valores extremos se obtienen para $\dot{\theta} = 0$, condición que introducida en (4) y con $\theta_0 = \pi/2$ conduce a la ecuación:

$$\cos\theta = -\frac{\dot{\theta}_0^2}{\frac{2g}{R} \operatorname{sen}\alpha} \ , \tag{5}$$

de la que se distinguen tres situaciones:

- $\dot{\theta}_0^2 < \frac{2g}{R} \operatorname{sen}\alpha$. En este caso el movimiento de tipo pendular está acotado, desarrollándose entre las generatrices $\theta_{1,2} = \pm \arccos(-R\dot{\theta}_0^2/(2g \operatorname{sen}\alpha))$.
- $\dot{\theta}_0^2 = \frac{2g}{R} \operatorname{sen}\alpha$. El movimiento no es pendular, tiende asintóticamente a $\theta = \pi$.
- $\dot{\theta}_0^2 > \frac{2g}{R} \operatorname{sen}\alpha$. El movimiento no es pendular, la trayectoria intersecta todas las generatrices del cilindro.