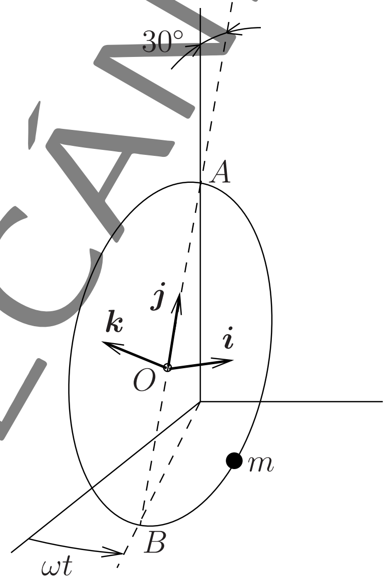
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (14 de enero de 2004)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Un aro de radio R se mueve de forma que uno de sus diámetros AB gira alrededor de la vertical con velocidad angular ω constante, siendo el punto A fijo. Además el plano del aro forma en todo momento un ángulo de 30° con la vertical. Una partícula pesada de masa m puede moverse con ligadura bilateral sobre el aro sin que exista fricción.

Por conveniencia se considera un sistema móvil auxiliar ligado al aro $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, siendo O el centro del aro, $\boldsymbol{i}$ un versor horizontal, $\boldsymbol{j}$ un versor según OA y $\boldsymbol{k}$ perpendicular a los anteriores formando un triedro a derechas.



Se pide:

1. Expresiones de la energía cinética y potencial de la partícula en función de los grados de libertad del sistema y sus derivadas;
2. Obtener mediante el formalismo lagrangiano la ecuación diferencial del movimiento de la partícula en el aro;
3. Discutir, y en su caso expresar, alguna posible integral primera del movimiento, proporcionando además su interpretación física.

---

1. La velocidad ($\boldsymbol{v}$) de la partícula puede obtenerse empleando el sistema auxiliar móvil ligado al aro $(O; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, teniendo en cuenta que éste gira con una velocidad $\boldsymbol{\omega} = \sqrt{3}\omega/2\boldsymbol{j} + \omega/2\boldsymbol{k}$. Denotando por P al punto ocupado por la partícula y φ al ángulo que forma OP con el radio OB, se obtienen las expresiones:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{v}_{\text{rel}} + \boldsymbol{v}_{\text{arr}} \\
\boldsymbol{v}_{\text{rel}} &= R\dot\varphi(\cos\varphi\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j}) \\
\boldsymbol{v}_{\text{arr}} &= \underbrace{\boldsymbol{v}_A}_{=\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{AP} = \frac{R\omega}{2}\left[(1+\cos\varphi)\boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j} - \sqrt{3}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{k}\right] \ ,
\end{aligned}$$

y la energía cinética se expresa finalmente:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 \\
&= \frac{1}{2}mR^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}mR^2\omega^2\left[\frac{1}{2}(1+\cos\varphi) + \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2\varphi\right] + \frac{1}{2}mR^2\omega\dot\varphi(1+\cos\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi)\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Tomando como origen el plano horizontal fijo que pasa por el punto A, el potencial del peso de la partícula resulta:

$$V = -mg\frac{\sqrt{3}}{2}R(1+\cos\varphi) \tag{2}$$

2. La ecuación diferencial del movimiento de la partícula se obtiene mediante la ecuación de Lagrange correspondiente a φ a partir de la función Lagrangiana $L = T - V$, obteniéndose:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0$$

$$R\left[\ddot{\varphi} + \frac{\omega^2}{4}\operatorname{sen}\varphi\,(1 - 3\cos\varphi)\right] = -g\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\varphi$$

3. Puesto que todas las fuerzas activas que actúan sobre la partícula (en este caso el peso) derivan de un potencial y el tiempo no aparece explícitamente en la función Lagrangiana, existe la integral de Jacobi, dada por la expresión:

$$\begin{aligned} h &= \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi} - L = cte. \\ &= \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}mR^2\omega^2\left[\frac{1}{2}(1+\cos\varphi) + \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2\varphi\right] - mg\frac{\sqrt{3}}{2}R(1+\cos\varphi) \end{aligned} \tag{3}$$

Es interesante observar que en este caso $h \neq E = T + V$ y por tanto la energía total no se conserva. Esto es coherente con el hecho de que existe un momento exterior sobre el aro, que mantiene su velocidad de giro constante, y que no es conservativo. Esta conclusión puede también obtenerse observando que la energía cinética (1) no es homogénea de orden dos en la velocidad generalizada $\dot{\varphi}$.

En este caso la integral de Jacobi puede interpretarse para un observador ligado al sistema móvil del aro como la energía relativa pero añadiendo un término complementario (ficticio) proveniente de las fuerzas inerciales. Efectivamente en este sistema móvil hay que incluir dos fuerzas de inercia: la de arrastre y la de Coriolis. La fuerza de arrastre es una repulsión del eje vertical fijo que pasa por A proporcional a la masa y a la distancia respecto de aquél. Por tanto, teniendo en cuenta que la distancia (r) del eje a la partícula en una posición genérica viene dada por $r^2 = R^2(1+\cos\varphi)^2/4 + R^2\operatorname{sen}^2\varphi$, el potencial de inercia de arrastre resulta:

$$V_{\mathrm{arr}} = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2R^2\left[\frac{1}{4}(1+\cos\varphi)^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\right], \tag{4}$$

expresión que es equivalente al segundo sumando de la expresión (3).

Por otro lado, la fuerza de inercia de Coriolis no trabaja en el movimiento relativo, puesto que por su propia definición es normal a la velocidad relativa:

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{Cor}} = -2m\boldsymbol{\omega}\wedge\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}} \;\Rightarrow\; \mathrm{d}W_{\mathrm{Cor}} = \boldsymbol{F}_{\mathrm{Cor}}\cdot\boldsymbol{v}_{\mathrm{rel}}\mathrm{d}t = 0\ .$$

Teniendo en cuenta finalmente que la energía cinética relativa es simplemente $T_{\mathrm{rel}} = (1/2)mR^2\dot{\varphi}^2$, añadiendo el potencial del peso (2) y el potencial (ficticio) de arrastre (4), se comprueba inmediatamente que esta suma coincide con h (3).