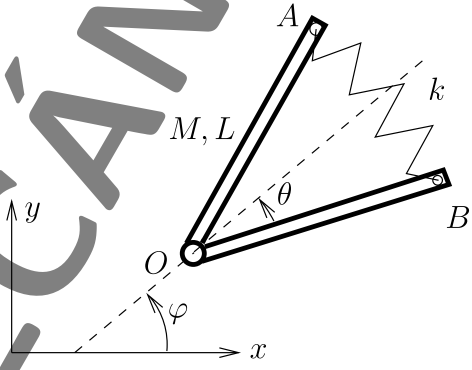
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO C (12 de diciembre de 2003)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Un sistema está constituido por dos barras iguales de masa M y longitud L, articuladas entre sí en un punto O. Los extremos libres de ambas barras se encuentran unidas con un muelle de constante k. El sistema se mueve en un plano vertical sin rozamiento sujeto al campo gravitatorio simplificado. A partir de unas condiciones iniciales arbitrarias, se pide:



1. Determinar el número de grados de libertad del sistema.
2. Calcular las ecuaciones diferenciales del movimiento. Para ello discutir la existencia de integrales primeras y en el caso de existir calcularlas.

1.— El sistema posee cuatro grados de libertad. Se trata de dos sólidos rígidos con movimiento plano por lo que cada uno tendría potencialmente tres grados de libertad. Al estar unidos ambos en un punto, los posibles seis grados de libertad quedan reducidos a cuatro. Se adoptan como parámetros definitorios de la configuración, las coordenadas del CDM (ξ, η), el ángulo φ que forma la bisectriz de $\angle AOB$ con la horizontal y, finalmente, el ángulo θ que forman las barras con la bisectriz.

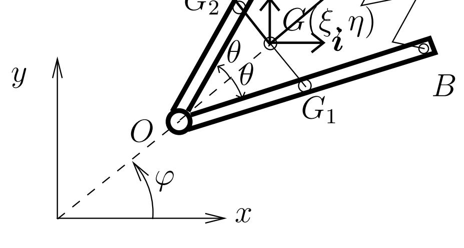
2.— Tres de las ecuaciones diferenciales que nos permitirían determinar la configuración del sistema a lo largo del tiempo serían las ecuaciones cardinales:

$$\sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = M\boldsymbol{a}_G \qquad \text{(2 ecs.)}$$
$$\sum \boldsymbol{M}_G = \dot{\boldsymbol{H}}_G \qquad \text{(1 ec.)}\ .$$

Estas ecuaciones son necesarias pero no suficientes para determinar la dinámica, faltando una ecuación para resolver los cuatro grados de libertad. Comprobaremos que al estar las coordenadas translacionales (ξ, η) desacopladas de las coordenadas angulares (θ, φ), la conservación de la energía nos proporciona una ecuación independiente adicional:

$$E = T + V\ . \tag{1}$$

Dado que la única fuerza exterior actuante es el peso, el momento en G es nulo, por lo que el momento cinético en G se conserva. El centro de masas describe, para unas condiciones iniciales arbitrarias, un movimiento parabólico. De este modo las ecuaciones resultan:



$$\ddot{\xi} = 0 \tag{2}$$
$$\ddot{\eta} = -g \tag{3}$$
$$\boldsymbol{H}_G = H\boldsymbol{k} \quad \text{(cte.)} \tag{4}$$

Existiendo, por tanto, tres integrales primeras.

Por conveniencia expresaremos el momento cinético haciendo uso de las velocidades relativas al SCM:

$$\boldsymbol{H}_G = \boldsymbol{H}_{1G} + \boldsymbol{H}_{2G}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}_{1G} &= I_{G_1}(\dot{\varphi} - \dot{\theta})\boldsymbol{k} + \boldsymbol{GG}_1 \wedge M\boldsymbol{\nu}_{G_1}\\ \boldsymbol{H}_{2G} &= I_{G_2}(\dot{\varphi} + \dot{\theta})\boldsymbol{k} + \boldsymbol{GG}_2 \wedge M\boldsymbol{\nu}_{G_2}\ ,\end{aligned}$$

donde $(\boldsymbol{H}_{1G}, \boldsymbol{H}_{2G})$ son respectivamente los momentos cinéticos en G de las barras 1 y 2 respecto al CDM del conjunto; G_1 y G_2 son, respectivamente, los CDM de las barras 1 (OB) y 2 (OA); $\boldsymbol{\nu}_{G_1}$ y $\boldsymbol{\nu}_{G_2}$ son las velocidades de ambos puntos relativas al SCM del conjunto; $I_{G_1} = I_{G_2} = (1/12)ML^2$. Sea $\{G, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ el SCM y $\{G, \boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{k}_1\}$ un sistema móvil según la dirección de la bisectriz, que gira por tanto con velocidad $\dot{\varphi}$ con respecto al primero. Las velocidades relativas se pueden expresar a través de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nu}_{G_1} &= \boldsymbol{\nu}_O + (\dot{\varphi} - \dot{\theta})\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{OG_1}\ ,\\ \boldsymbol{\nu}_{G_2} &= \boldsymbol{\nu}_O + (\dot{\varphi} + \dot{\theta})\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{OG_2}\ ;\end{aligned}$$

sabiendo

$$\boldsymbol{\rho}_O = -\frac{L}{2}\cos\theta\boldsymbol{i}_1 \Longrightarrow \boldsymbol{\nu}_O = \frac{L}{2}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta\boldsymbol{i}_1 - \frac{L}{2}\dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{j}_1$$

resultan

$$\boldsymbol{\nu}_{G_1} = \dot{\varphi}\frac{L}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\boldsymbol{i}_1 - \dot{\theta}\frac{L}{2}\cos\theta\boldsymbol{j}_1\ , \tag{5}$$

$$\boldsymbol{\nu}_{G_2} = -\dot{\varphi}\frac{L}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta\boldsymbol{i}_1 + \dot{\theta}\frac{L}{2}\cos\theta\boldsymbol{j}_1\ . \tag{6}$$

(Alternativamente, podría haberse considerado $\boldsymbol{GG}_1 = -(L/2)\,\mathrm{sen}\,\theta\,\boldsymbol{j}_1$, y derivar para obtener $\boldsymbol{\nu}_{G_1} = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\boldsymbol{GG}_1 = -(L/2)\dot{\theta}\cos\theta\,\boldsymbol{j}_1 - (L/2)\,\mathrm{sen}\,\theta\,(\dot{\varphi}\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{j}_1)$, y análogamente para $\boldsymbol{\nu}_{G_2}$, obteniéndose igual resultado a (5) y (6).)

Finalmente el momento cinético queda expresado:

$$\boxed{H = \frac{ML^2\dot{\varphi}}{2}\left(\mathrm{sen}^2\,\theta + \frac{1}{3}\right) = \mathrm{cte}} \tag{4}$$

La energía cinética y potencial se expresan a través de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned}T &= M(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{1}{2}M\nu_{G_1}^2 + \frac{1}{2}I_{G_1}(\dot{\varphi} - \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}M\nu_{G_2}^2 + \frac{1}{2}I_{G_2}(\dot{\varphi} + \dot{\theta})^2\\ V &= 2Mg\eta + 2kL^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\end{aligned}$$

Finalmente, la ecuación de la energía, sabiendo $I_{G_1} = I_{G_2} = 1/12ML^2$ resulta:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}(2M)(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + \frac{ML^2}{4}(\dot{\theta}^2\cos^2\theta + \dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta) + \frac{ML^2}{12}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2) + 2Mg\eta + 2kL^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta} \tag{1}$$

Se puede deducir de las ecuaciones (2) y (3) la constancia de la energía debida a la traslación del CDM. De este modo la ecuación de la energía del sistema se puede expresar en función únicamente de las coordenadas angulares del siguiente modo:

$$\begin{aligned}E' &= M(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + 2Mg\eta = \mathrm{cte}\\ E'' &= E - E' = \frac{ML^2}{4}\dot{\theta}^2\left(\cos^2\theta + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}H\dot{\varphi} + 2kL^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta = \mathrm{cte}.\end{aligned}$$