Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (22 de Marzo de 2004)

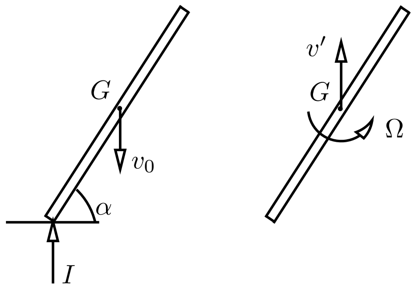
Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Una placa circular homogénea de radio R y masa m cae sin rotación impactando con velocidad v_0 sobre un plano horizontal liso, siendo el coeficiente de restitución e. En el instante del choque el plano de la placa forma un ángulo α con el plano horizontal. Se pide:

1. Movimiento de la placa después del choque
2. Valor del ángulo α para que la velocidad angular de la placa después del choque sea máxima.
3. Para el valor del ángulo α calculado en el apartado anterior hallar el coeficiente de restitución necesario para que en el instante posterior al choque la velocidad del centro de masas de la placa sea nula.

---

1. Dado que la velocidad del centro de masa y la percusión son verticales, y el plano vertical que contiene al diámetro de máxima pendiente del disco es un plano de simetría, el movimiento es plano estudiando el mismo según dicho plano vertical. En la figura siguiente se muestra el movimiento de la placa antes de la impulsión junto con la percusión reactiva I, y el movimiento de la placa en el instante inmediatamente posterior.



El problema se resuelve con las ecuaciones de balance de la cantidad de movimiento:

$$-mv_0 + I = mv' \tag{1}$$

de balance del momento cinético en el punto en el que se aplica la impulsión:

$$-mv_0 R\cos\alpha = \frac{1}{4}mR^2\Omega + mv'R\cos\alpha \tag{2}$$

y la ecuación del coeficiente de restitución:

$$e = -\frac{v' - \Omega R\cos\alpha}{-v_0} \tag{3}$$

resolviendo el sistema de ecuaciones (1), (2) y (3) se obtienen las tres incógnitas del problema:

$$v' = \frac{v_0\left(\frac{e}{4} - \cos^2\alpha\right)}{\frac{1}{4} + \cos^2\alpha} \tag{4}$$

$$\Omega = -\frac{v_0(1+e)\cos\alpha}{R\left(\frac{1}{4} + \cos^2\alpha\right)} \tag{5}$$

$$I = mv_0\left(1 + \frac{\frac{e}{4} - \cos^2\alpha}{\frac{1}{4} + \cos^2\alpha}\right) \tag{6}$$

2. Derivando la expresión (5) e igualando a cero:

$$\frac{d\Omega}{d\alpha} = 0 \rightarrow \operatorname{sen}\alpha\left(\cos^2\alpha - \frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \quad \alpha = 60° \tag{7}$$

Y comprobando el signo de la derivada segunda:

$$\frac{d^2\Omega}{d\alpha^2} = \frac{v_0(1+e)}{R}\frac{4\cos\alpha(25 + 16\cos^4\alpha - 56\cos^2\alpha)}{1 + 12\cos^2\alpha + 48\cos^4\alpha + 64\cos^6\alpha} \tag{8}$$

$$\left.\frac{d^2\Omega}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=0} = \frac{12v_0(1+e)}{25R} > 0 \Rightarrow \text{ mínimo} \tag{9}$$

$$\left.\frac{d^2\Omega}{d\alpha^2}\right|_{\alpha=60°} = -\frac{3v_0(1+e)}{R} < 0 \Rightarrow \text{ máximo} \tag{10}$$

Intuitivamente pudiera pensarse que el módulo de la velocidad angular debe ser mayor para $\alpha = 0°$, ya que al calcular el momento de la impulsión en el centro del disco el brazo es mayor (igual a R) que para $\alpha = 60°$ (igual a $R/2$). Realmente sucede que el valor de la impulsión no es el mismo para $\alpha = 0°$ que para $\alpha = 60°$, siendo 2,5 veces mayor en el segundo caso que en el primero.

3. Sustituyendo $\alpha = 60°$ en (4) e igualando a cero:

$$v' = \frac{v_0\left(\frac{e}{4} - \frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow e = 1 \tag{11}$$