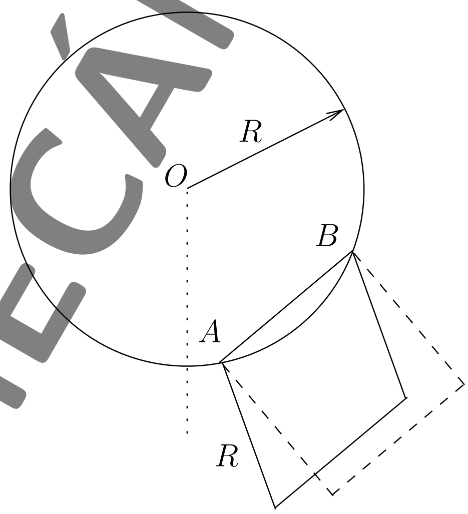
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (17 de marzo de 2004)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Una placa cuadrada de masa m y lado R se mueve de forma que dos de sus vértices adyancentes A y B están articulados a una circunferencia fija vertical de radio R, sobre la que deslizan sin fricción.



Se pide:

1. Determinar el número de grados de libertad del sistema, y elegir razonadamente un conjunto adecuado de parámetros que los representen;
2. Obtener la expresión de la velocidad angular de la placa $\mathbf{\Omega}$ en unos ejes ligados a ésta;
3. Obtener la expresión de la energía cinética de la placa;
4. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento de la placa;

---

1. El sistema tiene dos grados de libertad, que podemos representar mediante el ángulo θ que forma el segmento OC (siendo C el punto medio de la arista AB) con la vertical y el ángulo φ que forma el plano de la placa con el de la circunferencia, considerado positivo cuando la placa entra en el papel (ver Figura 1).

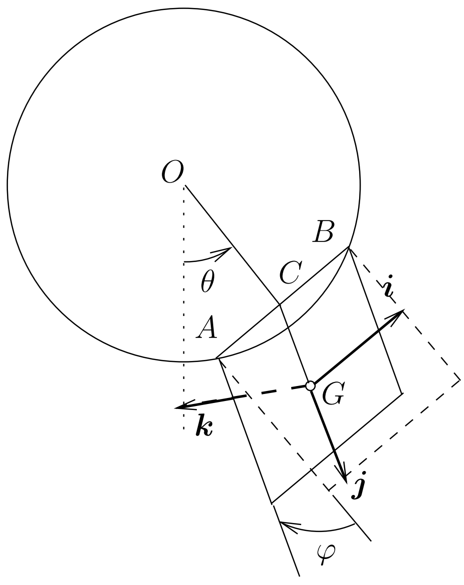


Figura 1: *Definición de coordenadas y sistema auxiliar móvil.*

2. Tal y como indica el enunciado, es conveniente definir un sistema móvil auxiliar $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ ligado a la placa. Se define de forma que el versor $\boldsymbol{i}$ lleva la dirección de la arista AB, $\boldsymbol{k}$ es perpendicular al plano de la placa y $\boldsymbol{j}$ es perpendicular a los anteriores, contenido en el plano de la placa y formando un triedro a derechas. La velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ se expresa en este sistema como:

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{i} - \dot{\theta}\operatorname{sen}\varphi\boldsymbol{j} - \dot{\theta}\cos\varphi\boldsymbol{k} \tag{1}$$

3. La energía cinética puede calcularse mediante la expresión:

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\mathbf{\Omega}\cdot(\boldsymbol{I}_G\cdot\mathbf{\Omega}) \tag{2}$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{v}_G = \boldsymbol{v}_C + \mathbf{\Omega}\wedge\boldsymbol{CG}$, que $\boldsymbol{v}_C = (R\sqrt{3}/2)\dot{\theta}\boldsymbol{i}$, y que $\boldsymbol{CG} = (R/2)\boldsymbol{j}$, la velocidad del centro de la placa resulta:

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{R}{2}\dot{\theta}(\sqrt{3} + \cos\varphi)\boldsymbol{i} + \frac{R}{2}\dot{\varphi}\boldsymbol{k} \tag{3}$$

Por otro lado, el tensor central de inercia se expresa en el sistema móvil como:

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \qquad \text{con} \quad A = \frac{1}{12}mR^2 \quad \text{y} \quad C = 2A = \frac{1}{6}mR^2 \tag{4}$$

Introduciendo (1), (3) y (4) en la expresión de la energía cinética (2) se obtiene:

$$T = \frac{1}{2}m\frac{R^2}{4}\left[\dot{\theta}^2\left(\sqrt{3} + \cos\varphi\right)^2 + \dot{\varphi}^2\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{12}mR^2\left[\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\left(1 + \cos^2\varphi\right)\right]$$

4. Suponiendo que el origen de potencial gravitatorio se encuentra en el plano horizontal fijo que pasa por O, el potencial del peso tiene la expresión:

$$V = -mg\frac{R}{2}\cos\theta\left(\sqrt{3} + \cos\varphi\right) \tag{5}$$

Con (2) y (5) se obtiene la Lagrangiana $L = T - V$, y las correspondientes ecuaciones de Lagrange resultan, después de una cierta elaboración:

$$mR^2\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{3}\cos^2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\right)\ddot{\theta} - \frac{1}{2}mR^2 \operatorname{sen}\varphi\left(\sqrt{3} + \frac{4}{3}\cos\varphi\right)\dot{\theta}\dot{\varphi} + mg\frac{R\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta(\sqrt{3} + \cos\varphi) = 0$$

$$\frac{1}{3}mR^2\ddot{\varphi} + mR^2\left(\frac{1}{3}\cos\varphi + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\operatorname{sen}\varphi\,\dot{\theta}^2 + mg\frac{R}{2}\cos\theta\operatorname{sen}\varphi = 0$$