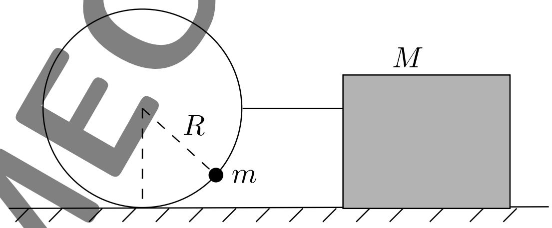
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (5 de mayo de 2004)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Un sistema mecánico está compuesto por un bloque de masa M unido a un aro sin masa de radio R, y una partícula pesada de masa m. El conjunto formado por el bloque y el aro se apoya sobre un plano horizontal fijo y liso, y la partícula está obligada a moverse sobre el aro con ligadura bilateral lisa.



Se pide:

1. Determinar el número de grados de libertad del sistema y seleccionar justificadamente parámetros que los representen;
2. Determinar las posiciones de equilibrio del sistema y su estabilidad;
3. Suponiendo pequeñas oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio estable, calcular frecuencias propias, modos propios y expresión de las coordenadas normales.

---

1. El sistema tiene dos grados de libertad, que podemos representar mediante la distancia horizontal (x) del centro del aro respecto de un punto fijo, y el ángulo θ que forma el radio donde se sitúa la partícula respecto de la vertical.

2. Las posiciones de equilibrio corresponden a configuraciones que hacen extremo el potencial gravitatorio, es decir las posiciones $\theta = 0$ y $\theta = \pi$, para cualquier valor del parámetro x. De las dos, $\theta = 0$ es la posición de equlibrio estable ya que corresponde al valor mínimo del potencial.

3. La Lagrangiana tiene la expresión:

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 + 2R\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta) + mgR\cos\theta \ ,$$

y las correspondientes ecuaciones diferenciales del movimiento se expresan como:

$$\begin{gathered}(M+m)\ddot{x} + mR\ddot{\theta}\cos\theta - R\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta = 0\\ mR^2\ddot{\theta} + mR\ddot{x}\cos\theta + mgR\operatorname{sen}\theta = 0 \ ,\end{gathered}$$

que linealizadas alrededor de la posición de equilibrio estable $\{x = x_0; \theta = 0\}$, $\forall x_0$, resultan:

$$(M+m)\ddot{s} + mR\ddot{\theta} = 0 \quad , \qquad mR^2\ddot{\theta} + mR\ddot{s} + mgR\theta = 0$$

siendo $s = x - x_0$. Las correspondientes matrices de masa y rigidez, para el vector de coordenadas $\mathbf{q}^{\mathrm{T}} = \{s, \theta\}$, tienen la expresión:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M+m & mR \\ mR & mR^2 \end{pmatrix} \quad ; \qquad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mgR \end{pmatrix}$$

La ecuación característica $|-\lambda\mathbf{M} + \mathbf{K}| = 0$ resulta:

$$\lambda\left[(M+m)(mgR - \lambda mR^2) + \lambda m^2R^2\right] = 0 \, ,$$

que proporciona las correspondientes frecuencias propias:

$$\omega_1 = 0 \quad ; \qquad \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{(M+m)g}{MR}} \, ,$$

asociadas a los modos:

$$\mathbf{a}_1 = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right\} \quad ; \qquad \mathbf{a}_2 = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ -\frac{M+m}{mR} \end{array} \right\}$$

El primer modo, correspondiente a la frecuencia propia nula, representa el movimiento como sólido rígido del sistema completo, que tiene totalmente libre el desplazamiento horizontal. Es fácil interpretar el segundo modo como el asociado a la conservación de cantidad de movimiento horizontal, de manera que cuando el bloque se desplaza en un sentido, la masa se mueve en sentido opuesto.

La matriz modal tiene la expresión:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{M+m}{mR} \end{pmatrix} \, ,$$

y las coordenadas normales ($\mathbf{u}$) resultan:

$$\boldsymbol{u} = \mathbf{A}^{-\mathrm{T}}\mathbf{q} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} u_1 = s + \frac{mR}{M+m}\theta \\ \\ u_2 = -\frac{mR}{M+m}\theta \end{cases}$$

Puede comprobarse fácilmente que u_1 corresponde a la posición horizontal del centro de masa del sistema (más una constante), y la ecuación correspondiente, desacoplada de la de u_2, expresa la constancia de su velocidad horizontal. La otra coordenada normal u_2 resulta símplemente el parámetro θ original escalado.