Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (11 de Mayo de 2004)

Apellidos	*Nombre*	*Nº*	*Grupo*

Una partícula de masa m está obligada a moverse sobre el paraboloide de revolución:

$$x^2 + y^2 = bz,$$

siendo Oz el eje vertical ascendente. Sobre la partícula actúan además de su peso dos fuerzas repulsivas:

1. Repulsión desde el origen de coordenadas O, proporcional a la distancia a la partícula, de constante $k_1 = mg/8b$.
2. Repulsión desde el eje z, proporcional a la distancia a la partícula, de constante $k_2 = 7mg/8b$.

En el supuesto de que el paraboloide sea liso, se pide:

1. Posiciones de equilibrio y análisis de la estabilidad de dichas posiciones.
2. Reacción de la superficie en dichas posiciones.

⋆

1. Empleando coordenadas cilíndricas r, θ y z, la ecuación del paraboloide es:

$$r^2 = bz \tag{1}$$

Las fuerzas que actúan sobre la partícula son:

- Peso: $\boldsymbol{F}_1 = -mg\boldsymbol{u}_z$
- Repulsión desde el origen de coordenadas: $\boldsymbol{F}_2 = k_1(r\boldsymbol{u}_r + r^2/b\,\boldsymbol{u}_z)$
- Repulsión desde el eje z: $\boldsymbol{F}_3 = k_2 r\boldsymbol{u}_r$

Todas las fuerzas son conservativas y por tanto provienen de sendas funciones potenciales que se calcularán a continuación.

Empleando la ecuación (1) para eliminar z en favor de r, el vector de posición de la partícula y su variación infinitesimal son:

$$\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{u}_r + \frac{r^2}{b}\boldsymbol{u}_z \Rightarrow \quad d\boldsymbol{r} = dr\,\boldsymbol{u}_r + rd\theta\,\boldsymbol{u}_\theta + \frac{2rdr}{b}\boldsymbol{u}_z \tag{2}$$

A partir de la definición de potencial y de las expresiones de las fuerzas aplicadas sobre la partícula y de $d\boldsymbol{r}$ resulta:

$$dV = -(\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3)\cdot d\boldsymbol{r} = \left[-(k_1+k_2)r + \left(mg - k_1\frac{r^2}{b}\right)\frac{2r}{b}\right]dr \tag{3}$$

Integrando y sustituyendo los valores de k_1 y k_2 dados en el enunciado:

$$V(r) = \int_0^r dV = \left(-\frac{1}{2}(k_1+k_2) + \frac{mg}{b}\right)r^2 - \frac{1}{2}\frac{k_1}{b^2}r^4 = \frac{1}{2}\frac{mg}{b}r^2 - \frac{1}{16}\frac{mg}{b^3}r^4 \tag{4}$$

<u>*NOTA*</u>:

Un procedimiento más intuitivo y sencillo de operar consiste en expresar directamente el potencial del peso como:

$$V_1 = mgz = mg\frac{r^2}{b}$$

y los correspondientes a las fuerzas repulsivas proporcionales a la distancia mediante:

$$V_2 = -\frac{1}{2}k_1(r^2 + z^2) = -\frac{1}{2}k_1 r^2\left(1 + \frac{r^2}{b^2}\right)$$
$$V_3 = -\frac{1}{2}k_2 r^2$$

La función potencial V se obtiene igualmente mediante la suma $V(r) = V_1 + V_2 + V_3$

Las posiciones de equilibrio corresponden a los valores de r para los que se anula la primera derivada de V:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{mg}{b}r - \frac{1}{4}\frac{mg}{b^3}r^3 = 0 \Rightarrow \quad r = 0, \quad r = 2b \tag{5}$$

Para estudiar la naturaleza de las posiciones de equilibrio analizamos el signo de la derivada segunda de V:

$$\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{mg}{b} - \frac{3}{4}\frac{mg}{b^3}r^2 \tag{6}$$
$$\left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r=2b} = -\frac{2mg}{b} < 0 \text{ máximo}, \ \Rightarrow \ \text{Eq. inestable} \tag{7}$$
$$\left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r=0} = \frac{mg}{b} > 0 \text{ mínimo}, \ \Rightarrow \ \text{Eq. estable} \tag{8}$$

2. La reacción del paraboloide sobre la partícula lleva la dirección del vector normal al mismo $\boldsymbol{N}$. Dicha dirección se calcula a partir del gradiente de la ecuación (1) del paraboloide:

$$\boldsymbol{N} = -2r\,\boldsymbol{u}_r + b\,\boldsymbol{u}_z \tag{9}$$

expresándose la reacción $\boldsymbol{R}$:

$$\boldsymbol{R} = \lambda\left(-\frac{2r}{b}\boldsymbol{u}_r + \boldsymbol{u}_z\right) \tag{10}$$

En la ecuación de equilibrio:

$$\boldsymbol{R} + \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 = \boldsymbol{0} \tag{11}$$

la componente según $\boldsymbol{u}_z$ es:

$$\lambda = mg\left(1 - \frac{r^2}{8b^2}\right) \tag{12}$$

Para la posición $r = 2b$ resulta $\lambda = mg/2$, de donde:

$$\boldsymbol{R} = \frac{mg}{2}(-4\boldsymbol{u}_r + \boldsymbol{u}_z) \tag{13}$$

En la posición $r = 0$ sobre la partícula sólo actúa el peso por lo que $\boldsymbol{R} = mg\boldsymbol{u}_z$.