ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO C (28 de octubre de 2003)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Un punto material M, de masa m, se mueve sin rozamiento con enlace bilateral sobre una curva situada en un plano horizontal. Dicha curva se puede expresar en coordenadas polares mediante la ecuación $\rho = \frac{a}{2}(1+\cos\theta)$, correspondiente a la ecuación de una cardioide. Sobre dicho punto material se encuentra aplicada una fuerza $\boldsymbol{F}$ de valor $\boldsymbol{F} = 2mk^2a\boldsymbol{u}_\rho$, donde k es una constante positiva y $\boldsymbol{u}_\rho$ un vector unitario en la dirección de OM. En el instante inicial se encuentra en M_0 (ρ_0, θ_0) con velocidad inicial nula.

Se pide:

1. Razonar la existencia de integrales primeras y expresarlas en su caso, demostrando que el módulo de la velocidad v de M se puede expresar como:

$$v^2 = 4ak^2(\rho - \rho_0)$$

2. Integrar la ecuación diferencial, para ello efectuar el cambio de variables $u = \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$.

3. Para las condiciones iniciales dadas calcular el tiempo que tarda en volver a la posición inicial. Calcular dicho tiempo si parte del punto M_0 definido para $\theta = 2\theta_0$.

---

1. Las fuerzas actuantes sobre la partícula son la reacción y la fuerza central. La primera es ortogonal a la curva en todo instante por lo que su trabajo es nulo. La fuerza aplicada $\boldsymbol{F}$ es central y constante, por lo que deriva de un potencial. Por lo tanto se conserva la energía (cinética+potencial).

El potencial del que deriva la fuerza $\boldsymbol{F}$ se puede calcular del siguiente modo:

$$V = -\int \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\int 2mk^2a\boldsymbol{u}_\rho \cdot [(\mathrm{d}\rho)\boldsymbol{u}_\rho + (\rho\mathrm{d}\theta)\boldsymbol{u}_\theta] = -2mk^2a\rho + C$$

La ecuación de la energía resulta:

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 - 2mk^2a\rho = -2mk^2a\rho_0$$

El módulo de la velocidad se puede expresar:

$$\boxed{v^2 = 4k^2a(\rho - \rho_0)} \tag{1}$$

Sabiendo que $v^2 = \dot\rho^2 + \rho^2\dot\theta^2$ y que la partícula está obligada a moverse en la cardioide, por lo que ρ y θ están relacionados a través de la ecuación de la curva $\rho = \frac{a}{2}(1+\cos\theta)$:

$$\dot\rho = -\frac{a}{2}\dot\theta \operatorname{sen}\theta$$

$$v^2 = \frac{a^2}{2}(1 + \cos\theta)\dot{\theta}^2 \tag{2}$$

Sustituyendo (2) en (1) y teniendo en cuenta la definición de la curva, se obtiene, finalmente la ecuación diferencial (integral primera) del movimiento:

$$\boxed{(1 + \cos\theta)\dot{\theta}^2 = 4k^2(\cos\theta - \cos\theta_0)} \tag{3}$$

2. Efectuando el cambio de variables recomendado y sustituyendo en (3) se obtiene la ecuación diferencial siguiente:

$$\boxed{\dot{u}^2 = k^2(u_0^2 - u^2)} \tag{4}$$

Integrando:

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u_0^2 - u^2}} = \int k\mathrm{d}t \Longrightarrow \arccos\left(\frac{u}{u_0}\right) = kt$$

Deshaciendo el cambio se obtiene, finalmente:

$$u = u_0 \cos kt \Longrightarrow \boxed{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\cos kt}$$

Se puede comprobar que la ecuación (4) es una primera integral de la ecuación correspondiente a un movimiento armónico simple, como se puede comprobar derivando ambos miembros de la ecuación:

$$\boxed{\ddot{u} + k^2 u = 0}$$

3. Al tratarse de un movimiento armónico la trayectoria está acotada entre los valores angulares $[-\theta_0, \theta_0]$. El tiempo que tarda en volver a la posición inicial es el correspondiente al período:

$$T = \frac{2\pi}{k}$$

En el segundo caso la trayectoria se encuentra comprendida entre los valores angulares $[-2\theta_0, 2\theta_0]$, tardando el mismo tiempo T en volver a la posición inicial. Se trata por tanto de un movimiento tautócrono .