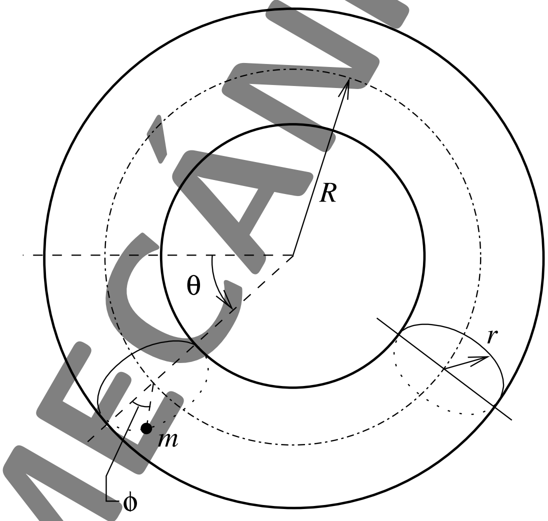
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (12 de noviembre de 2004)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Una partícula pesada se mueve con ligadura bilateral lisa sobre una superficie toroidal fija, cuya línea media es una circunferencia vertical de radio R, y su sección normal es otra circunferencia de radio r. La posición de la partícula queda determinada por los ángulos θ y ϕ de la figura adjunta.

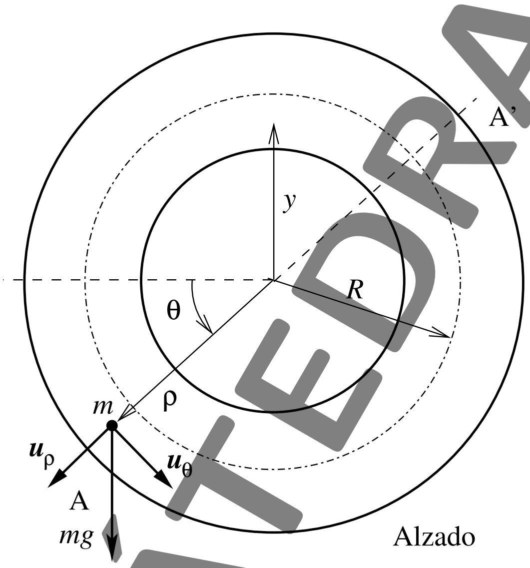
Se pide:



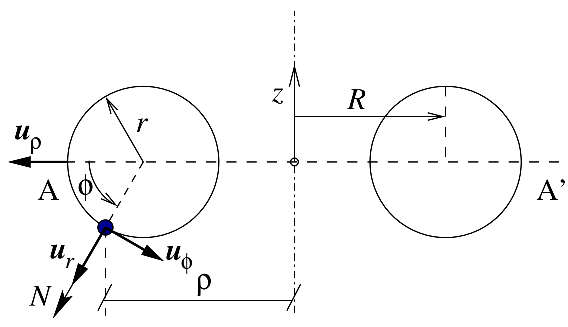
1. Discutir la existencia de integrales primeras del movimiento de la partícula;
2. Expresar las ecuaciones diferenciales del movimiento de la partícula en función de θ, ϕ y sus derivadas;
3. Expresión de la reacción sobre la partícula en un instante genérico.

1.— Para interpretar el movimiento de la partícula usaremos las coordenadas (θ, ϕ) y los vectores unitarios toroidales $\{\boldsymbol{u}_r,\ \boldsymbol{u}_\theta,\ \boldsymbol{u}_\phi\}$ (el plano definido por $(\boldsymbol{u}_\theta,\ \boldsymbol{u}_\phi)$ es tangente al toro, mientras que la normal lleva la dirección de $\boldsymbol{u}_r$). Usaremos también el vector unitario auxiliar $\boldsymbol{u}_\rho = \cos\phi\, \boldsymbol{u}_r - \operatorname{sen}\phi\, \boldsymbol{u}_\phi$, mediante el cual el peso se expresa como

$$m\,\boldsymbol{g} = mg(\operatorname{sen}\theta\, \boldsymbol{u}_\rho + \cos\theta\, \boldsymbol{u}_\theta) = mg(\operatorname{sen}\theta \cos\phi\, \boldsymbol{u}_r + \cos\theta\, \boldsymbol{u}_\theta - \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi\, \boldsymbol{u}_\phi)\ . \qquad (1)$$



Alzado



Sección AA'

No se conserva ni la cantidad de movimiento ni el momento cinético. Sin embargo, sólo actúa la gravedad y la reacción $\boldsymbol{N} = N\, \boldsymbol{u}_r$ que no desarrolla trabajo, por lo que la energía se conserva:

$$E = T + V = \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \text{cte.}$$

Para desarrollar la expresión anterior basta considerar $y = -\rho \operatorname{sen}\theta$, $\rho = R + r\cos\phi$, y $\boldsymbol{v} = \dot{\rho}\,\boldsymbol{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\,\boldsymbol{u}_\theta$, resultando

$$E = \frac{m}{2}\left(r^2\dot{\phi}^2 + (R + r\cos\phi)^2\dot{\theta}^2\right) - mg(R + r\cos\phi)\operatorname{sen}\theta\ .$$

2.— Debemos obtener la expresión de la aceleración, para lo cual emplearemos las expresiones en coordenadas cilíndricas (ρ, θ, z):

$$\begin{aligned}
a_\rho &= \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 = -r\ddot{\phi}\operatorname{sen}\phi - r\dot{\phi}^2\cos\phi - (R + r\cos\phi)\dot{\theta}^2\,,\\
a_\theta &= 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = -2r\dot{\phi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\phi + (R + r\cos\phi)\ddot{\theta}\,,\\
a_z &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(-r\operatorname{sen}\phi) = -r\ddot{\phi}\cos\phi + r\dot{\phi}^2\operatorname{sen}\phi\,.
\end{aligned}$$

Proyectando según las direcciones toroidales (r, θ, ϕ) se obtiene

$$\begin{aligned}
a_r &= a_\rho\cos\phi - a_z\operatorname{sen}\phi = -r\dot{\phi}^2 - (R + r\cos\phi)\dot{\theta}^2\cos\phi\,,\\
a_\theta &= -2r\dot{\phi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\phi + (R + r\cos\phi)\ddot{\theta}\,,\\
a_\phi &= -a_\rho\operatorname{sen}\phi - a_z\cos\phi = r\ddot{\phi} + (R + r\cos\phi)\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\phi\,.
\end{aligned}$$

Usando las componentes del peso (1), las ecuaciones de la dinámica ($\sum \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$) resultan:

$$\begin{aligned}
N + mg\operatorname{sen}\theta\cos\phi &= -m\left[r\dot{\phi}^2 + (R + r\cos\phi)\dot{\theta}^2\cos\phi\right]\,,\\
mg\cos\theta\ &= m\left[-2r\dot{\phi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\phi + (R + r\cos\phi)\ddot{\theta}\right]\,,\\
-mg\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi &= m\left[r\ddot{\phi} + (R + r\cos\phi)\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\phi\right]\,.
\end{aligned} \tag{2}$$

3.— De la ecuación $(2)_1$ despejamos el valor de N:

$$N = -mg\operatorname{sen}\theta\cos\phi - m\left[r\dot{\phi}^2 + (R + r\cos\phi)\dot{\theta}^2\cos\phi\right]\ .$$