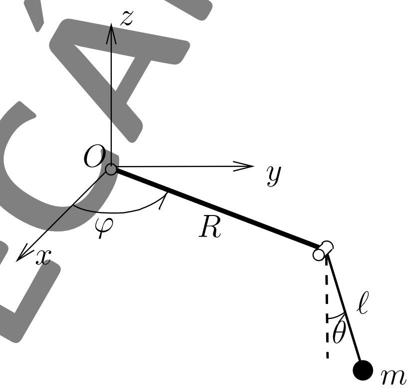
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO C (2 de noviembre de 2004)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Un sistema mecánico está constituido por una brazo horizontal sin masa de longitud R en el que se articula un péndulo de longitud ℓ y masa m. El brazo describe un movimiento horizontal en torno a un punto fijo O. El péndulo está obligado a moverse en el plano vertical que contiene el brazo. Para poner en movimiento el sistema se aplica un momento vertical M en el punto O.



Se pide:

1. Determinar las ecuaciones diferenciales del movimiento y discutir la existencia de integrales primeras.

2. Plantear las ecuaciones en el caso en el que el momento exterior deja de actuar discutiendo la existencia de integrales primeras del movimiento.

3. En este último caso, determinar las condiciones que debe cumplir la velocidad angular $\dot{\varphi}$ para que la masa m experimente un movimiento estacionario ($\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$).

---

1. La posición de la masa m queda perfectamente determinada mediante los dos parámetros que se han definido φ y θ. El sistema posee, por tanto, dos grados de libertad y serán necesarias, al menos, dos ecuaciones diferenciales. En este caso, las dos ecuaciones que nos permiten resolver directamente el problema eliminando la reacción sobre la partícula son, respectivamente la correspondiente a la cantidad de movimiento en dirección ortogonal al péndulo, $\boldsymbol{u}_\theta$ y la ecuación del momento cinético vertical en O:

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u}_\theta = m\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}_\theta \tag{1}$$

$$M_{Oz} = \frac{\mathrm{d}H_{Oz}}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

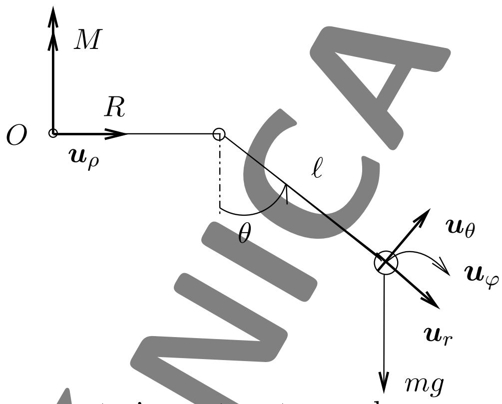
La velocidad y la aceleración expresadas en coordenadas cilíndricas, se obtienen a partir de la posición de la partícula:

$$\rho = R + \ell \operatorname{sen}\theta; \quad \varphi; \quad z = -\ell\cos\theta$$

$$\dot{\rho} = -\ell\dot{\theta}\cos\theta; \quad \dot{\varphi}; \quad \dot{z} = \ell\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta$$

$$v_\rho = \dot{\rho} = \ell\dot{\theta}\cos\theta$$
$$v_\varphi = \rho\dot{\varphi} = (R + \ell\operatorname{sen}\theta)\dot{\varphi}$$

$$
\begin{aligned}
a_\rho &= \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = \ell\ddot{\theta}\cos\theta - \ell\dot{\theta}^2\operatorname{sen}\theta - (R + \ell\operatorname{sen}\theta)\dot{\varphi}^2 \\
a_\varphi &= 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = 2\ell\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + (R + \ell\operatorname{sen}\theta)\ddot{\varphi} \\
a_z &= \ell\ddot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \ell\dot{\theta}^2\cos\theta
\end{aligned}
$$



Sabiendo que $\boldsymbol{u}_\theta = \cos\theta\boldsymbol{u}_\rho + \operatorname{sen}\theta\boldsymbol{k}$ y que la única fuerza exterior actuante es el peso $\boldsymbol{F} = -mg\boldsymbol{k}$, la ecuación (1) resulta:

$$
\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta - \frac{(R + \ell\operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{\ell}\dot{\varphi}^2 = 0} \tag{3}
$$

Otro procedimiento que podría haberse seguido para el cálculo anterior sería adoptar la composición de movimientos adoptando como sistema móvil el que acompaña en su giro al brazo horizontal:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}_{\text{rel}} &= \ell\ddot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\boldsymbol{u}_r \\
\boldsymbol{a}_{\text{arr}} &= (R + \ell\operatorname{sen}\theta)\ddot{\varphi}\boldsymbol{u}_\varphi - (R + \ell\operatorname{sen}\theta)\dot{\varphi}^2\boldsymbol{u}_\rho \\
\boldsymbol{a}_{\text{cor}} &= 2\dot{\varphi}\boldsymbol{k} \wedge \ell\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta = -2\ell\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\boldsymbol{u}_\varphi
\end{aligned}
$$

De igual modo, $H_{Oz} = m(R + \ell\operatorname{sen}\theta)^2\dot{\varphi}$ y $M_{Oz} = M$ por lo que la ecuación (2) se puede expresar del siguiente modo:

$$
\boxed{M = m\ddot{\varphi}(R + \ell\operatorname{sen}\theta)^2 + 2ml(R + \ell\operatorname{sen}\theta)\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta}
$$

2. Si $M = 0$ es fácil comprobar que el momento cinético vertical es constante, $H_{Oz} = C$ y la energía se conserva. Las dos integrales primeras resultan:

$$
\dot{\varphi} = \frac{C}{m(R + \ell\operatorname{sen}\theta)^2} \tag{4}
$$

$$
E = \frac{1}{2}m[\ell^2\dot{\theta}^2 + (R + \ell\operatorname{sen}\theta)^2\dot{\varphi}^2] - mg\ell\cos\theta \tag{5}
$$

sustituyendo (4) en (5), el problema se reduce a una única ecuación diferencial:

$$
E = \frac{1}{2}m\left[\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{C^2}{m^2(R + \ell\operatorname{sen}\theta)^2}\right] - mg\ell\cos\theta
$$

3. Si $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$, θ es constante y, por tanto a partir de (4), $\dot{\varphi}$ también. En estas condiciones de (3) y (4) resulta:

$$
\boxed{\dot{\varphi}^2 = \frac{g\tan\theta}{R + \ell\operatorname{sen}\theta}}
$$