Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (29 de Marzo de 2005)

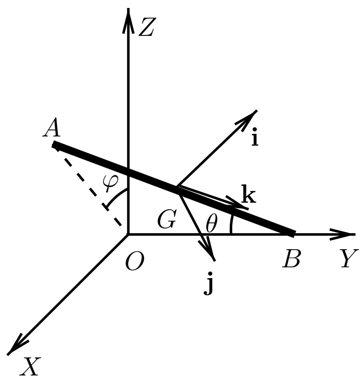
Apellidos *Nombre* *Nº* *Grupo*

Se considera un sistema de referencia fijo $OXYZ$ tal que OZ es vertical. Una varilla AB de masa m y longitud $2L$ se mueve de manera que su extremo A está en todo momento en el plano OXZ y el extremo B en el eje OY. Se pide:

1. Ecuaciones diferenciales del movimiento.
2. Integrales primeras.
3. Reacciones en función de los grados de libertad y sus derivadas.

⋆

1. Con el movimiento descrito la varilla tiene dos grados de libertad. Utilizaremos los ángulos θ y φ de la figura. Asimismo se considera un triedro móvil con origen en el centro de masas G de la varilla, con el versor $\boldsymbol{k}$ según la varilla, $\boldsymbol{i}$ ortogonal a $\boldsymbol{k}$ y contenido en el plano OAB y $\boldsymbol{j}$ formando un triedro dextrógiro con $\boldsymbol{i}$ y $\boldsymbol{k}$.



Las ecuaciones diferenciales del movimiento se obtendrán a partir de la función Lagrangiana. Las coordenadas del centro de masas de la varilla en los ejes $OXYZ$ son:

$$X_G = L \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \tag{1}$$
$$Y_G = L\cos\theta \tag{2}$$
$$Z_G = L \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \tag{3}$$

Derivando se obtiene la velocidad de G:

$$v_G^2 = \dot{X}_G^2 + \dot{Y}_G^2 + \dot{Z}_G^2 = L^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) \tag{4}$$

La velocidad angular es:

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\varphi}\boldsymbol{J} - \dot{\theta}\boldsymbol{j} = \dot{\varphi}\operatorname{sen}\theta\boldsymbol{i} - \dot{\theta}\boldsymbol{j} + \dot{\varphi}\cos\theta\boldsymbol{k} \tag{5}$$

El tensor central de inercia de la varilla referido a los ejes móviles se expresa:

$$\boldsymbol{I}_G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{3}mL^2 \tag{6}$$

A partir de (4), (5) y (6) se obtiene la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\cdot\boldsymbol{I}_G\boldsymbol{\Omega} = \frac{2}{3}mL^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) \tag{7}$$

la energía potencial es:

$$V = mgz_G = mgL \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \tag{8}$$

resultando la función lagrangiana:

$$L = \frac{2}{3}mL^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) - mgL \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \tag{9}$$

Las ecuaciones diferenciales del movimiento se obtienen derivando la función lagrangiana:

$$\frac{4}{3}mL^2\ddot{\theta} - \frac{4}{3}mL^2\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta + mgL \cos\theta \cos\varphi = 0 \tag{10}$$

$$\frac{4}{3}mL^2\ddot{\varphi} \operatorname{sen}^2\theta + \frac{8}{3}mL^2\dot{\theta}\dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta \cos\theta - mgL \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi = 0 \tag{11}$$

2. La única integral primera del movimiento corresponde a la conservación de la energía mecánica:

$$\frac{2}{3}mL^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta) + mgL \operatorname{sen}\theta \cos\varphi = E \tag{12}$$

3. En los ejes $OXYZ$ las reacciones pueden expresarse como:

$$\boldsymbol{R}_A = R_A \boldsymbol{J} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{R}_B = R_{Bx}\boldsymbol{I} + R_{Bz}\boldsymbol{K} \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

Para calcularlas planteamos el balance de la cantidad de movimiento en G:

$$R_{Bx} = m\ddot{X}_G \tag{16}$$

$$R_A = m\ddot{Y}_G \tag{17}$$

$$R_{Bz} = mg + m\ddot{Z}_G \tag{18}$$

Derivando en (1), (2) y (3), y sustituyendo resulta:

$$R_A = -mL(\ddot{\theta} \operatorname{sen}\theta + \dot{\theta}^2 \cos\theta) \tag{19}$$

$$R_{Bx} = mL(\ddot{\theta} \cos\theta \operatorname{sen}\varphi + \ddot{\varphi} \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\theta \cos\varphi - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi) \tag{20}$$

$$R_{Bz} = mg + mL(\ddot{\theta} \cos\theta \cos\varphi - \ddot{\varphi} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi - 2\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\theta \operatorname{sen}\varphi - (\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2) \operatorname{sen}\theta \cos\varphi) \tag{21}$$