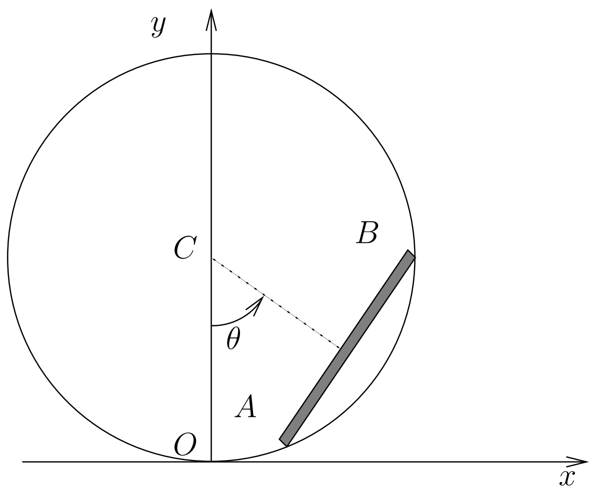
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO A (19 de Mayo de 1999)

Apellidos *Nombre* *N.º* *Grupo*

Sobre un plano vertical se dispone de una varilla homogénea y pesada de masa m y longitud a. Dicha varilla puede moverse sin rozamiento sobre una circunferencia fija, de radio a, de forma que sus extremos A y B están situados en todo instante sobre puntos de dicha circunferencia, como se indica en la figura.
Además del peso, sobre la varilla actúa sobre cada partícula de la misma, una fuerza repulsiva del eje Oy proporcional al producto de la masa de cada partícula por su distancia al eje, siendo ω^2 la constante de proporcionalidad.
Se pide:



1. Calcular todas las posibles posiciones de equilibrio y analizar su dependencia con el valor ω^2.
2. Determinar ω^2 para que $\theta = 60°$ sea posición de equilibrio.
3. Reacciones en A y B para la anterior posición de equilibrio.
4. Discutir la estabilidad de la posición de equilibrio $\theta = 0°$.

1.- Las posiciones de equilibrio de la varilla pueden calcularse empleando diferentes métodos.

Uno de ellos es mediante las expresiones correspondientes de la mecánica analítica. En este planteamiento, es necesario calcular el potencial $V(\theta)$ de las fuerzas directamente aplicadas y calcular los valores de θ en los que V presenta un extremo. Las únicas fuerzas directamente aplicadas son el peso y la fuerza de repulsión.

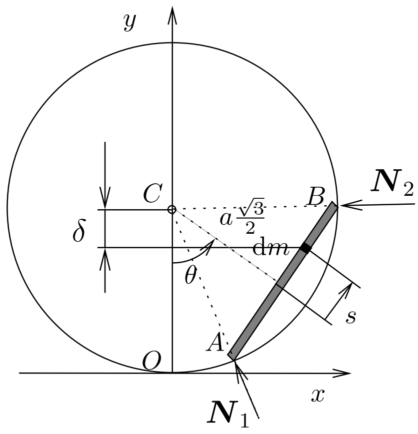
En primer lugar, calculamos el potencial de la fuerza repulsiva. Una partícula $\mathrm{d}m$ de la varilla está sometida a una fuerza de valor $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_r = \omega^2\, x\, \mathrm{d}m\, \boldsymbol{i}$, siendo x la distancia de la partícula al eje y. El potencial del que deriva esta fuerza es:

$$\mathrm{d}V_r = -\frac{1}{2}\omega^2\, x^2\ \mathrm{d}m$$

de forma que se verifica que $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_r = -\mathbf{grad}\,\mathrm{d}V_r$. El potencial total se obtiene integrando a lo largo de la varilla:

$$V_r = \frac{1}{2}\omega^2 \int_{AB} x^2\, \mathrm{d}m$$

Para ello, tomamos como variable auxiliar la distancia (s) de una partícula cualquiera al centro de la varilla, de forma que $x = a\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta + s\cos\theta$ (ver figura adjunta), resultando:



$$V_r = -\frac{1}{2}\omega^2\frac{m}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta + s\cos\theta\right)^2 \mathrm{d}s \qquad (1)$$

donde además se ha tenido en cuenta que $\mathrm{d}m = \frac{m}{a}\mathrm{d}s$. La integral (1) resulta:

$$V_r = -\frac{1}{8}m\,\omega^2\,a^2\left(3\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{3}\cos^2\theta\right)$$

El potencial total $V(\theta)$ es la suma del de la fuerza repulsiva y el del peso, obteniéndose la expresión:

$$V(\theta) = -\frac{1}{8}m\,\omega^2\,a^2\left(3\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{3}\cos^2\theta\right) - mga\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta$$

donde se ha tomado como origen de potencial gravitatorio la horizontal que pasa por el punto C.

Las posiciones de equilibrio se calculan como los valores de θ que hacen extremo el potencial:

$$\frac{\mathrm{d}V(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = ma\operatorname{sen}\theta\left(g\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3}a\omega^2\cos\theta\right) = 0 \qquad (2)$$

obteniéndose las posiciones:

$$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = \pi \qquad \theta_3 = \arccos\left(\frac{3g\sqrt{3}}{4a\omega^2}\right) \qquad (3)$$

θ_1 y θ_2 existen para cualquier valor de ω^2, pero la posición θ_3 solo existe para $\omega^2 > \frac{3g\sqrt{3}}{4a}$, ya que la función cos no toma valores mayores que la unidad.

Una forma alternativa de obtener las posiciones de equilibrio es plantear las ecuaciones cardinales de la estática $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} = \boldsymbol{M}_C$, siendo $\boldsymbol{F}$ la resultante de todas las fuerzas externas sobre la varilla y $\boldsymbol{M}_C$ la resultante de los momentos de las fuerzas externas en el punto C. Este punto es el más adecuado para plantear la nulidad de momentos puesto que las reacciones del aro, al ser éste liso, se dirigen según el radio y su momento en el punto central es nulo.

Con este planteamiento, es necesario calcular el momento en C de la fuerza repulsiva. Podemos hacer esto mediante dos procedimientos. El primero consistiría en sustituir el sistema de vectores correspondiente a las fuerzas repartidas por uno estáticamente equivalente que consista en una única fuerza aplicada en un cierto punto de la varilla, y posteriormente calcular el momento de esta única fuerza en C. El segundo procedimiento consiste en calcular directamente el momento en C de las fuerzas de repulsión repartidas. Procediendo con este segundo método, el momento $\mathrm{d}\boldsymbol{M}_{rC} = \mathrm{d}M_{rC}\boldsymbol{k}$ sobre una partícula $\mathrm{d}m$ se expresa como:

$$\mathrm{d}M_{rC} = \delta\,\mathrm{d}F_r = \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta - s\operatorname{sen}\theta\right)\omega^2\,x\,\mathrm{d}m$$

de forma que el momento total en C de la fuerza repulsiva resulta:

$$\begin{aligned} M_{rC} &= \omega^2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(a\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\theta - s \operatorname{sen}\theta \right) \left(a\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}\theta + s\cos\theta \right) \frac{m}{a} \, \mathrm{d}s \\ &= \frac{2}{3} m\omega^2 a^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \end{aligned}$$

Sumando a M_{rC} el momento del peso ($M_g = -mg\frac{\sqrt{3}}{2}a\operatorname{sen}\theta$) e igualando la expresión resultante a cero, se obtiene de nuevo la ecuación (2) que proporciona las posiciones de equilibrio.

2.- Sustituyendo $\theta_3 = \pi/3$ en la tercera expresión de (3 se obtiene:

$$\omega^2 = \frac{3g\sqrt{3}}{2a} \tag{4}$$

En esta posición de equilibrio, el segmento $\overline{BC}$ se encuentra en posición horizontal y el $\overline{AC}$ forma un ángulo de 30° con la vertical.

3.- Las reacciones se obtienen planteando que las dos componentes de la resultante de todas las fuerzas externas sobre la varilla deben anularse. Para ello hay que tener en cuenta que la resultante se las fuerzas de repulsión ($\boldsymbol{F}_r = F_r \boldsymbol{i}$) vale:

$$F_r = \int_{AB} \mathrm{d}F_r = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \omega^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}\theta + s\cos\theta \right) \frac{m}{a} \, \mathrm{d}s = a\frac{\sqrt{3}}{2} m\omega^2 \operatorname{sen}\theta$$

que, como puede observarse, coincide con la que se obtendría concentrando toda la masa de la varilla en su centro.

Las ecuaciones de equilibrio resultan:

$$\begin{aligned} F_x = 0 \quad &\Rightarrow \quad -\frac{1}{2}N_1 - N_2 + a\frac{\sqrt{3}}{2} m\omega^2 \operatorname{sen}\theta = 0 \\ F_y = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} N_1 - mg = 0 \end{aligned}$$

De estas ecuaciones, sustituyendo $\theta = 60°$ y teniendo en cuenta el valor de ω^2 dado en (4), se obtienen las reacciones:

$$N_1 = \frac{2\sqrt{3}mg}{3} \qquad N_2 = \frac{19\sqrt{3}}{24} mg$$

4.- Para discutir la estabilidad del equilibrio hay que estudiar el signo de la derivada segunda del potencial:

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} mga\cos\theta - \frac{2}{3} ma^2\omega^2 \cos(2\theta) \tag{5}$$

En el caso de que la expresión anterior sea menor que cero, la posición es estable, y en caso contrario es inestable. Sustituyendo en la expresión (5) $\theta = 0$, se obtiene la caracterización de la estabilidad pedida:

$$\begin{array}{lcll} \omega^2 & < & \dfrac{3g\sqrt{3}}{4a} & \text{Equilibrio} \quad \text{estable} \\ \omega^2 & > & \dfrac{3g\sqrt{3}}{4a} & \text{Equilibrio} \quad \text{inestable} \end{array}$$

En el caso límite $\omega^2 = \frac{3g\sqrt{3}}{4a}$ se observa que la derivada segunda (5) se anula, por lo que hay que comprobar el signo de la derivada cuarta:

$$\frac{\mathrm{d}^4 V}{\mathrm{d}\theta^4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} mga\cos\theta + \frac{8}{3} ma^2\omega^2 \cos(2\theta) \tag{6}$$

Sustituyendo en (6) los valores $\theta = 0$ y $\omega^2 = \frac{3g\sqrt{3}}{4a}$ se obtiene el valor $\frac{3\sqrt{3}mga}{2}$, por lo que esta posición es de equilibrio estable.