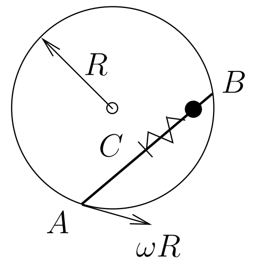
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (2 de Noviembre de 1999)

Apellidos *Nombre* *N”o* *Grupo*

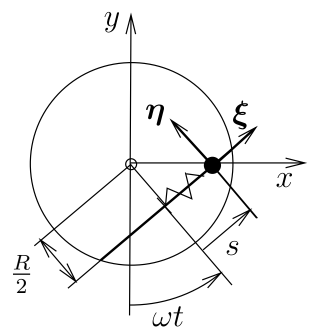
Una partícula pesada de masa m se mueve en todo momento sobre una varilla AB de longitud $R\sqrt{3}$. Los extremos de A y B de la varilla recorren una circunferencia vertical fija de radio R con velocidad $v_A = v_B = \omega R$. Además, entre la partícula y el punto medio de la varilla (C) existe un resorte de longitud natural nula y constante k. En el instante inicial la varilla se encuentra en posición horizontal, y la partícula se encuentra en el punto C en reposo respecto de la la varilla.



Se pide:

1. Expresar las ecuaciones del movimiento de la partícula.
2. Valor mínimo de k para que el movimiento de la partícula sea de tipo oscilatorio.
3. Expresión de la reacción de la varilla sobre la partícula.
4. Calcular el trabajo de la reacción sobre la partícula entre $t = 0$ y un instante genérico.

1.- La velocidad de giro de la varilla ω es constante, por lo que el movimiento de la partícula queda totamente determinado por un único parámetro. Elegimos éste como la distancia s de la partícula al centro de la varilla. En primer lugar, calculamos la aceleración de la partícula a partir de sus coordenadas (x, y) respecto de un sistema cartesiano inercial:



$$x = \frac{R}{2}\operatorname{sen}\omega t + s\cos\omega t \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \ddot{x} = -\frac{R}{2}\omega^2\operatorname{sen}\omega t + \ddot{s}\cos\omega t - 2\dot{s}\omega\operatorname{sen}\omega t - s\omega^2\cos\omega t$$

$$y = -\frac{R}{2}\cos\omega t + s\operatorname{sen}\omega t \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{y} = \frac{R}{2}\omega^2\cos\omega t + \ddot{s}\operatorname{sen}\omega t + 2\dot{s}\omega\cos\omega t - s\omega^2\operatorname{sen}\omega t$$

A partir de $(\ddot{x}, \ddot{y})$, calculamos las componentes de la aceleración según la dirección de la propia varilla ($\boldsymbol{\xi}$) y en la dirección perpendicular ($\boldsymbol{\eta}$):

$$a_\xi = \ddot{x}\cos\omega t + \ddot{y}\operatorname{sen}\omega t \quad = \quad \ddot{s} - s\omega^2 \tag{1}$$

$$a_\eta = -\ddot{x}\operatorname{sen}\omega t + \ddot{y}\cos\omega t \quad = \quad \frac{R}{2}\omega^2 + 2\dot{s}\omega \tag{2}$$

Otra forma de calcular las componentes (a_ξ, a_η) de la aceleración sería haciendo uso de un sistema móvil que acompañe a la varilla, con una de las direcciones según la propia varilla. De esta forma se obtiene $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_{\text{rel}} + \boldsymbol{a}_{\text{arr}} + \boldsymbol{a}_{\text{cor}}$, con:

$$\boldsymbol{a}_{\text{rel}} = \ddot{s}\boldsymbol{\xi} \qquad \boldsymbol{a}_{\text{arr}} = \frac{R}{2}\omega^2\boldsymbol{\eta} - s\omega^2\boldsymbol{\xi} \qquad \boldsymbol{a}_{\text{cor}} = 2\dot{s}\omega\boldsymbol{\eta}$$

obteniéndose las mismas expresiones (1) y (2).

Proyectando las fuerzas aplicadas (peso según la vertical descendente, la reacción de la varilla $\boldsymbol{N} = N\boldsymbol{\eta}$ y fuerza del resorte $\boldsymbol{F}_k = -ks\boldsymbol{\xi}$) según las mismas direcciones, se obtienen las ecuaciones:

$$m(\ddot{s} - s\omega^2) = -mg\,\mathrm{sen}\,\omega t - ks \tag{3}$$

$$m(\frac{R}{2}\omega^2 + 2\omega\dot{s}) = N - mg\cos\omega t \tag{4}$$

La expresión (3) es la ecuación del movimiento, que integrada proporciona $s = s(t)$. La ecuación (4) permite calcular la reacción de la varilla N.

2.- Los términos de la ecuación (3) se pueden reordenar, obteniéndose:

$$m\ddot{s} + (k - m\omega^2)s = -mg\,\mathrm{sen}\,\omega t$$

que representa un movimiento forzado, y cuyo carácter oscilatorio viene determinado por el signo de la rigidez de muelle equivalente $k^* = k - m\omega^2$. Si $k \geq m\omega^2$, el movimiento es oscilatorio. En caso contrario es divergente, gobernado por una función exponencial.

3.- De la expresión (4) se deduce la reacción de la varilla:

$$N = m(\frac{R}{2}\omega^2 + 2\omega\dot{s}) + mg\cos\omega t$$

4.- El sistema formado solamente por la partícula no es conservativo, puesto que su movimiento tiene lugar sobre una curva móvil, en la que en general el trabajo de la fuerza de reacción no es nulo. Físicamente, este trabajo es el que un agente externo debe realizar sobre el sistema partícula-varilla para que ésta se mueva con velocidad angular constante.

El principio de la energía cinética establece que el trabajo (W) de todas las fuerzas aplicadas sobre la partícula entre dos instantes es igual a la variación de su energía cinética:

$$T - T_0 = \underbrace{W_k}_{muelle} + \underbrace{W_p}_{peso} + \underbrace{W_N}_{reaccion} \tag{5}$$

Puesto que la partícula parte desde $s_0 = 0$ con velocidad relativa nula $\dot{s}_0 = 0$, los distintos términos de (5) se expresan como:

$$T - T_0 = \frac{1}{2}m\left[\left(\dot{s} + \frac{R}{2}\omega\right)^2 + (s\omega)^2\right] - \frac{1}{2}m\left(\frac{R}{2}\omega\right)^2$$

$$W_p = -(V - V_0) = -mg\left[\frac{R}{2}(1 - \cos\omega t) + s\,\mathrm{sen}\,\omega t\right]$$

$$W_k = -\frac{1}{2}ks^2$$

de donde se deduce la expresión del trabajo de la reacción:

$$W_N = \frac{1}{2}m(\dot{s}^2 + R\omega\dot{s} + s^2\omega^2) + mg\left[\frac{R}{2}(1 - \cos\omega t) + s\,\mathrm{sen}\,\omega t\right] + \frac{1}{2}ks^2$$