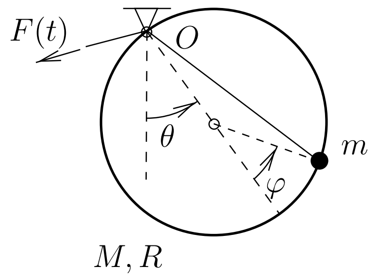
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE DE PRÁCTICAS, GRUPO B (20 de Enero de 2000)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

Un aro de masa M y radio R se mueve en todo momento en un plano vertical con un punto de su periferia O fijo. Ensartada en el aro se mueve una partícula de masa m. Por otra parte, la partícula está unida a uno de los extremos de un cable inextensible y sin masa, que pasa por O a través de una pequeña argolla. En el otro extremo del cable se aplica una fuerza $F(t)$ dada. No existe rozamiento entre ninguna de las partes del sistema.



Se pide:

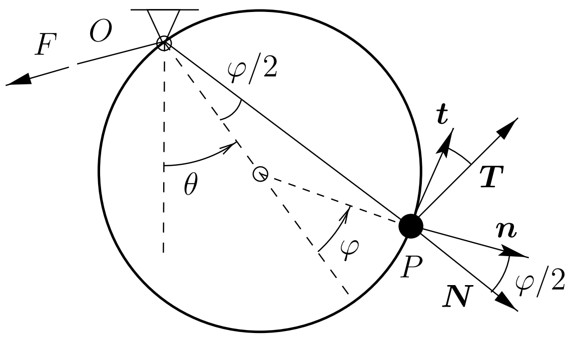
1. Calcular las fuerzas generalizadas asociadas a los grados de libertad indicados en la figura.

2. Calcular la energía cinética y potencial del sistema.

3. Obtener las ecuaciones diferenciales del movimiento a partir de las ecuaciones de Lagrange.

4. Justificar razonadamente la existencia o no de integrales primeras del movimiento y su interpretación física.

5. Calcular la reacción del aro sobre la partícula en un instante genérico mediante la técnica de multiplicadores de Lagrange.



1. Consideramos los ejes de la figura adjunta, en donde $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{n})$ son los versores tangente y normal respectivamente a la circunferencia en el punto P, $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{N})$ son respectivamente perpendicular y paralelo a $\boldsymbol{OP}$, y $\boldsymbol{k}$ es el versor normal hacia fuera del papel.

Las fuerzas activas en este caso son el peso del aro, el peso de la partícula P y la fuerza $F(t)$. Las fuerzas gravitatorias derivan de un potencial V por lo que la contribución de las mismas a las fuerzas generalizadas Q_θ y Q_φ se puede expresar a través de las siguientes ecuaciones:

$$Q_\theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta}; \quad Q_\varphi = -\frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

La contribución de la fuerza $F(t)$ a las fuerzas generalizadas se obtiene calculando el trabajo virtual a través de la siguiente ecuación:

$$\delta W = \boldsymbol{F} \cdot \delta \boldsymbol{r}.$$

Sabiendo que $\boldsymbol{F} = -F(t)\boldsymbol{N}$ y

$$\boldsymbol{r} = 2R\cos\frac{\varphi}{2}\boldsymbol{N} \quad \Rightarrow \quad \delta\boldsymbol{r} = -R\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2}\delta\varphi\boldsymbol{N} + 2R\cos\frac{\varphi}{2}(\delta\theta + \delta\varphi)\boldsymbol{T}$$

resulta

$$\delta W = FR\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2}\delta\varphi$$

Tomando como referencia una recta horizontal que pase por O el potencial de las fuerzas gravitatorias es el siguiente:

$$V = -MgR\cos\theta - mgR[\cos\theta + \cos(\theta + \varphi)] \tag{1}$$

Las fuerzas generalizadas resultan finalmente:

$$\begin{aligned} Q_\theta &= -(M+m)gR\,\mathrm{sen}\,\theta - mgR\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi) \\ Q_\varphi &= FR\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2} - mgR\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi) \end{aligned}$$

2. La energía cinética del sistema es la siguiente:

$$T = \frac{1}{2}I_O\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mv_P^2$$

sabiendo que

$$\boldsymbol{v}_P = R\dot{\varphi}\,\boldsymbol{t} + 2R\cos\frac{\varphi}{2}\dot{\theta}\,\boldsymbol{T}$$

$$T = MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2[\dot{\varphi}^2 + 4\dot{\theta}^2\cos^2\frac{\varphi}{2} + 4\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos^2\frac{\varphi}{2}]$$

3. Las ecuaciones diferenciales del movimiento se obtienen a través de las ecuaciones de Lagrange siguientes:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varphi} = Q_\varphi}$$

$$m[R^2\ddot{\varphi} + R^2\ddot{\theta}(1+\cos\varphi) + R^2\dot{\theta}^2\,\mathrm{sen}\,\varphi] = FR\,\mathrm{sen}\,\frac{\varphi}{2} - mgR\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi)$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\theta} = Q_\theta}$$

$$\begin{aligned} &[2MR^2 + 2mR^2(1+\cos\varphi)]\ddot{\theta} + mR^2(1+\cos\varphi)\ddot{\varphi} - mR^2\,\mathrm{sen}(\varphi)\dot{\varphi}^2 \\ &\qquad - 2mR^2\,\mathrm{sen}(\varphi)\dot{\varphi}\dot{\theta} = -(M+m)gR\,\mathrm{sen}\,\theta - mgR\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi) \end{aligned}$$

4. Para las coordenadas que se han tomado no existen integrales primeras. La energía no se conserva debido a que la fuerza $F(t)$ realiza un trabajo y suministra, por tanto, energía al sistema. Las coordenadas no son cíclicas ya que el peso del aro y de la partícula ejerce un momento exterior respecto al punto O por lo que tampoco se conserva el momento cinético con respecto a dicho punto.

5. Para el cálculo de la reacción R_n del aro sobre la partícula se introduce un nuevo grado de libertad r de modo que la partícula pueda moverse fuera del aro. La nueva ecuación diferencial resulta:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial T}{\partial r} = Q_r + \lambda,}$$

de manera que λ es el multiplicador de Lagrange asociado a la restricción $r = R$. En este caso

$$\boldsymbol{v}_P = R\dot{\varphi}\,\boldsymbol{t} + \dot{r}\,\boldsymbol{n} + \dot{\theta}\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr\cos\varphi}\,\boldsymbol{T}$$

$$\begin{aligned} T = MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m[&\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2(R^2 + r^2 + 2Rr\cos\varphi) + \\ &+ 2\dot{\theta}\dot{r}\,\mathrm{sen}(\varphi/2)\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr\cos\varphi} + \\ &+ r^2\dot{\varphi}^2 + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos(\varphi/2)\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr\cos\varphi}] \end{aligned}$$

$$Q_r = -F\cos(\varphi/2) + mg\cos(\theta + \varphi)$$

De modo que finalmente resulta:

$$\lambda = R_n = F\cos\frac{\varphi}{2} - mg\cos(\theta + \varphi) + m[-R\dot{\varphi}^2 + R\ddot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\varphi - R\dot{\theta}^2(1 + \cos\varphi) - 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}]$$