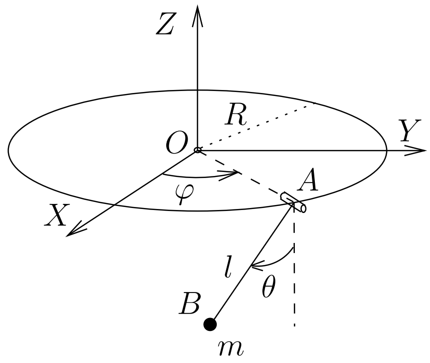
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE CAMINOS, CANALES Y PUERTOS (MADRID)

Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (18 de Enero del 2000)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

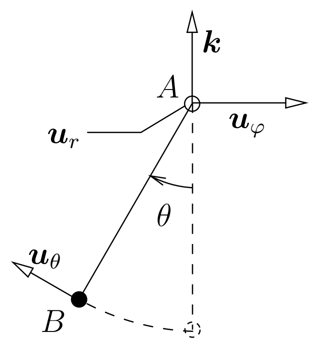


Una partícula pesada de masa m se mueve unida mediante una varilla AB rígida, sin masa y de longitud l, a una rótula A de masa despreciable. A su vez, esta rótula A está obligada a permanecer en todo momento sobre una circunferencia horizontal fija de radio R. La rótula A actúa obligando a que la varilla se mueva contenida el plano vertical tangente por A a la circunferencia.

Se pide:

1. Obtener las ecuaciones del movimiento mediante los métodos de la mecánica analítica.
2. Expresar las posibles integrales primeras del movimiento, e interpretarlas físicamente.
3. En el caso de que A se mueva con velocidad de módulo constante $|\boldsymbol{v}_A| = \omega R$, expresar el potencial de la fuerza de arrastre correspondiente a un sistema de referencia móvil con origen en A, con el eje z vertical y cuyo plano yz contiene en todo momento a la varilla AB.
4. Para la situación del apartado 3, expresar posibles integrales primeras del movimiento e interpretarlas físicamente.

1.– Para definir las magnitudes vectoriales emplearemos los ejes XYZ de la figura del enunciado, así como los versores de la figura adjunta: $\boldsymbol{u}_\varphi$ según la coordenada φ, $\boldsymbol{u}_\theta$ según la coordenada θ, y $\boldsymbol{u}_r$ según el radio del centro del círculo hacia A (dirigido hacia fuera del papel en la figura).
La velocidad de B es



$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}_{AB}, \tag{1}$$

donde $\boldsymbol{\Omega}$ es la velocidad angular de la varilla AB,

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\varphi}\, \boldsymbol{k} - \dot{\theta}\, \boldsymbol{u}_r. \tag{2}$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{v}_A = R\dot{\varphi}\, \boldsymbol{u}_\varphi$, resulta

$$\boldsymbol{v}_B = R\dot{\varphi}\, \boldsymbol{u}_\varphi + l\dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta\, \boldsymbol{u}_r + l\dot{\theta}\, \boldsymbol{u}_\theta. \tag{3}$$

Con esto ya se puede calcular la Lagrangiana, resultando

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{2}m\left(R^2\dot{\varphi}^2 + l^2\dot{\theta}^2 - 2Rl\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right) + mgl\cos\theta. \tag{4}$$

Derivando se obtienen las ecuaciones de Lagrange:

$$ml^2\dot\varphi \operatorname{sen}^2\theta + mR^2\dot\varphi - mRl\dot\theta\cos\theta = \text{cte.}; \tag{5}$$

$$ml^2\ddot\theta - mRl\ddot\varphi\cos\theta - ml^2\dot\varphi^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + mgl\operatorname{sen}\theta = 0. \tag{6}$$

(La primera corresponde a la ecuación en φ, que resulta ser coordenada cíclica puesto que $\partial L/\partial\varphi = 0$).

2.– En primer lugar se tiene la integral primera (5) correspondiente a la coordenada cíclica φ. Físicamente equivale a la conservación del momento cinético respecto al eje vertical OZ, ya que las fuerzas exteriores al sistema que dan momento en O son paralelas a dicho eje.

Por otra parte, al ser las fuerzas conservativas, la energía total es constante:

$$E = \frac{1}{2}ml^2\dot\varphi^2\operatorname{sen}^2\theta + \frac{1}{2}m\left(R^2\dot\varphi^2 + l^2\dot\theta^2 - 2Rl\dot\varphi\dot\theta\cos\theta\right) - mgl\cos\theta. \tag{7}$$

3.– Podemos considerar el sistema como un péndulo simple sometido a un movimiento no inercial de rotación con velocidad $\omega\,\boldsymbol{k}$ alrededor de O. Este movimiento produce una fuerza inercial de arrastre (centrífuga), de valor

$$\boldsymbol{f}_{\text{arr}} = -m\boldsymbol{a}_{\text{arr}} = mR\omega^2\,\boldsymbol{u}_r - m\omega^2 l\operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{u}_\varphi. \tag{8}$$

Puede demostrarse[1] que esta fuerza proviene de un potencial de valor

$$V_{\text{arr}}(\boldsymbol{r}_{AB}) = \underbrace{m\boldsymbol{a}_A\cdot\boldsymbol{r}_{AB}}_{=0} - \frac{m}{2}\omega^2 r_{AB}^2 + \frac{m}{2}(\omega\,\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_{AB})^2 = -\frac{m}{2}\omega^2 l^2\operatorname{sen}^2\theta. \tag{9}$$

4.– En este caso, la coordenada φ ya no es cíclica: para imponer el movimiento de rotación será necesario aplicar un par, siendo la ecuación de Lagrange para esta coordenada la que resulta de derivar (5) respecto del tiempo, colocando en el lado derecho del signo = el momento generalizado Q_φ y sustituyendo $\dot\varphi = \omega$, $\ddot\varphi = 0$:

$$2ml^2\omega\dot\theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta - mRl\ddot\theta\cos\theta + mRl\dot\theta^2\operatorname{sen}\theta = Q_\varphi. \tag{10}$$

La energía del sistema no se conserva, ya que el par aplicado desarrolla un trabajo sobre el sistema. Sin embargo, mediante el potencial de la fuerza de arrastre (9) podemos expresar una integral primera,

$$T_{\text{rel}} + V_{\text{arr}} + V = \frac{m}{2}l^2\dot\theta^2 - \frac{m}{2}l^2\omega^2\operatorname{sen}^2\theta - mgl\cos\theta = \text{cte.} \tag{11}$$

Alternativamente, al ser $\partial L/\partial t = 0$ podríamos obtener una integral primera mediante la integral de Jacobi,

$$h = \frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\dot\theta - L = -\frac{1}{2}ml^2\omega^2\operatorname{sen}^2\theta - \frac{1}{2}mR^2\omega^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot\theta^2 - mgl\cos\theta = \text{cte.} \tag{12}$$

Es inmediato comprobar que esta expresión es equivalente a (11), siendo la diferencia entre ambas tan sólo el término constante $-\frac{1}{2}mR^2\omega^2$.

[1]consultar apuntes de mecánica