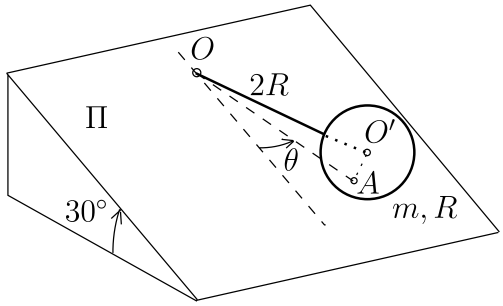
Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (Madrid)

Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (8 de Marzo de 2000)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

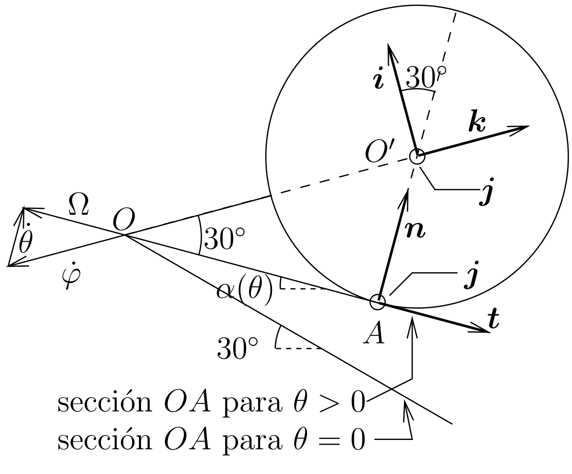
Una esfera hueca con pared de espesor despreciable, masa m y radio R rueda sin deslizar sobre un plano inclinado (Π) un ángulo 30°. El centro O' de la esfera está unido mediante una articulación a un punto fijo O del plano Π a través de una barra de longitud $2R$ y masa despreciable. La posición de la barra se define mediante el ángulo θ que forma su proyección sobre el plano inclinado y una línea de máxima pendiente del mismo.



Se pide:

1. Tensor de inercia del conjunto en O.
2. Expresión del momento cinético $\boldsymbol{H}_O$ en función de $\dot{\theta}$.
3. Expresión del momento de las fuerzas externas en O (se deberá considerar que la reacción del plano inclinado (Π) sobre la esfera está contenida en todo momento en un plano que es perpendicular tanto a Π como a la proyección de la barra sobre él).
4. Ecuaciones de Euler del movimiento.
5. Expresar las reacciones y la ecuación dinámica exclusivamente en función de θ y sus derivadas.
6. Justificar que el movimiento que se produce es de tipo pendular.
7. Integrales primeras del movimiento.

1.– En primer lugar describiremos las direcciones que tomaremos para describir la geometría. La figura adjunta representa el plano OAO' en verdadera magnitud. Observamos primeramente que este plano no es vertical, salvo para la posición particular $\theta = 0$, en cuyo caso OA es la máxima pendiente de Π. En segundo lugar, hacemos notar que la pendiente de la recta OA en una posición genérica $0 < \theta \leq \pi/2$ tiene un valor $\alpha(\theta) < 30°$, siendo $\alpha(0) = 30°$ sólo para $\theta = 0$.



Consideramos las direcciones del triedro definido por los versores $\boldsymbol{k}$ (según la varilla OO'), $\boldsymbol{i}$ (normal a la varilla dentro del plano OAO') y $\boldsymbol{j}$ (perpendicular al plano OAO', saliendo hacia fuera del papel en la figura adjunta, paralelo al plano inclinado). Asimismo, emplearemos los versores $\boldsymbol{n}$ (normal al plano Π) y $\boldsymbol{t}$ (según la recta $OA \in \Pi$).

Expresaremos las componentes del tensor de inercia $\boldsymbol{I}_O$ en las direcciones $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$, que son principales de inercia. El momento de inercia de una esfera hueca respecto de un eje por su centro es $I_{xx} = \frac{2}{3}MR^2$, por lo que aplicando el teorema de Steiner resulta $A = B = \frac{14}{3}MR^2$ y $C = \frac{2}{3}MR^2$, es decir

$$[\boldsymbol{I}_O] = \begin{pmatrix} \frac{14}{3}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{14}{3}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}MR^2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

2.– La rotación del sólido se puede descomponer en una $\dot{\theta}\,\boldsymbol{n}$ alrededor de un eje normal al plano, y una rotación propia $\dot{\varphi}\,\boldsymbol{k}$ alrededor del eje de revolución. El valor de $\dot{\varphi}$ se calcula imponiendo la condición de rodadura en A:

$$\dot{\varphi}\frac{\sqrt{3}}{2}R = -\dot{\theta}\sqrt{3}R \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = -2\dot{\theta}. \tag{2}$$

De esta forma, la expresión de la velocidad angular en el triedro indicado es

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\theta}\,\boldsymbol{n} - 2\dot{\theta}\,\boldsymbol{k} = \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{\theta}\,\boldsymbol{i} - \frac{3}{2}\dot{\theta}\,\boldsymbol{k}. \tag{3}$$

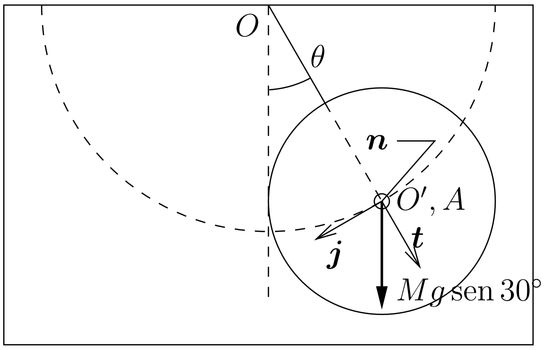
El momento cinético resulta pues

$$\boldsymbol{H}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{\sqrt{3}}{2}A\dot{\theta}\,\boldsymbol{i} - \frac{3}{2}C\dot{\theta}\,\boldsymbol{k}. \tag{4}$$

3.– Según indica el enunciado la reacción $\boldsymbol{R}_A$ tangencial al plano lleva la dirección de $\boldsymbol{j}$, por lo que

$$\boldsymbol{R}_A = N\,\boldsymbol{n} + T\,\boldsymbol{j}. \tag{5}$$

En la figura adjunta se dibuja el plano inclinado abatido en verdadera magnitud, sobre el cual se hallan los versores $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{t}$.



Para obtener la expresión del peso en los versores dados observamos primero que el plano OAO' no es vertical en cualquier posición $\theta \neq 0$. Realizamos una primera proyección del peso según la normal $\boldsymbol{n}$ y según la máxima pendiente, siendo esta última componente $Mg \operatorname{sen} 30°$ como se indica en la figura. A su vez ésta se descompone según $\boldsymbol{t}$ y $\boldsymbol{j}$, resultando

$$-Mg\boldsymbol{K} = -Mg\cos 30°\,\boldsymbol{n} + Mg \operatorname{sen} 30°(\cos\theta\,\boldsymbol{t} + \operatorname{sen}\theta\,\boldsymbol{j}); \tag{6}$$

a su vez, los versores $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{t}$ pueden descomponerse según el triedro $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$:

$$-Mg\,\boldsymbol{K} = Mg\left[-\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos\theta\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\right)\boldsymbol{j} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\theta\right)\boldsymbol{k}\right] \tag{7}$$

Ya podemos calcular el momento,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_O &= \sqrt{3}R\,\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{R}_A + 2R\,\boldsymbol{k} \wedge (-Mg\,\boldsymbol{K}) \\ &= -\left(\frac{3}{2}TR + MgR \operatorname{sen}\theta\right)\boldsymbol{i} + \left(\sqrt{3}NR - 2MgR\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos\theta\right)\right)\boldsymbol{j} - \frac{\sqrt{3}}{2}TR\,\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{8}$$

4.– El triedro $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ se mueve con el sólido salvo por su rotación propia. Teniendo en cuenta que ésta se efectúa alrededor del eje $(O, \boldsymbol{k})$ de revolución, las ecuaciones de Euler tienen la expresión general

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{I}_O \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rel}} + \boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}). \tag{9}$$

El primer sumando en esta expresión vale

$$\boldsymbol{I}_O \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rel}} = \frac{\sqrt{3}}{2} A\ddot{\theta}\,\boldsymbol{i} - \frac{3}{2} C\ddot{\theta}\,\boldsymbol{k}. \tag{10}$$

Por otra parte, $\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} = \dot{\theta}\,\boldsymbol{n}$, por lo que

$$\boldsymbol{\omega}_{\text{ref}} \wedge (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) = \frac{\sqrt{3}}{4}(A + 3C)\dot{\theta}^2\,\boldsymbol{j}. \tag{11}$$

Sustituyendo las componentes, resultan las tres ecuaciones siguientes:

$$-\left(\frac{3}{2} TR + MgR \operatorname{sen}\theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} A\ddot{\theta}; \tag{12}$$

$$\sqrt{3}NR - 2MgR\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos\theta\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}(A + 3C)\dot{\theta}^2; \tag{13}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} TR = -\frac{3}{2} C\ddot{\theta}. \tag{14}$$

5.– La reacción tangencial T viene definida en (14), mientras que la normal N está definida en (13). Obtenemos la ecuación dinámica eliminando T en (12) para obtener

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(A + 3C)\ddot{\theta} + MgR \operatorname{sen}\theta = 0. \tag{15}$$

6.– Observamos que la ecuación anterior es equivalente a un péndulo simple, cuya ecuación genérica es $\ddot{\theta} + (g/l)\operatorname{sen}\theta = 0$, siendo l la longitud del mismo. La longitud del péndulo equivalente, sustituyendo los valores de A y C, resulta

$$l_{\text{eq}} = \frac{10}{\sqrt{3}} R. \tag{16}$$

7.– Puesto que todas las fuerzas activas son conservativas y las reactivas no trabajan, se conserva la energía total. La expresión de la integral primera es

$$\begin{aligned} T + V &= \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot (\boldsymbol{I}_O \cdot \boldsymbol{\Omega}) + MgZ_G \\ &= \boxed{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}A + \frac{9}{4}C\right)\dot{\theta}^2 + Mg\frac{\sqrt{3}}{2}R(1 - \cos\theta) = E \quad (\text{cte.})} \end{aligned} \tag{17}$$

Se observa fácilmente que, derivando la expresión anterior respecto del tiempo, se obtiene la misma ecuación (15).