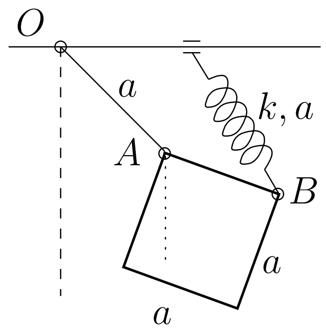
Mecánica

PROBLEMA PUNTUABLE (3 de Mayo de 2000)

Apellidos	*Nombre*	*N.º*	*Grupo*

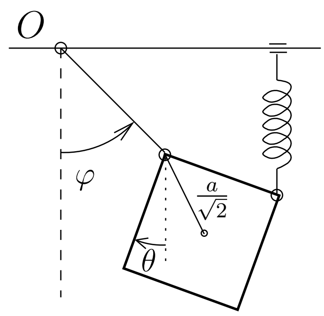
Una placa cuadrada de masa m y lado a se articula en un vértice A a un punto fijo O a través de una barra rígida de masa despreciable y longitud a, tal y como se muestra en la figura adjunta. En otro vertice B de la placa se articula un resorte de constante k y longitud natural a cuyo extremo opuesto desliza sobre una recta horizontal lisa que pasa por O.



Se pide:

1. Expresión de la energía potencial del sistema..
2. Discutir la existencia de posiciones de equilibrio en función del valor de k. Plantear las ecuaciones que permitirían su cálculo y realizar éste cuando sea posible de forma analítica.
3. Discutir la estabilidad de las posiciones de equilibrio previamente calculadas en el caso que $k = mg/a$.

1.- Tanto el resorte como la deslizadera no tienen masa, y además la recta horizontal sobre la que se mueve es lisa, por lo que se puede deducir a priori que el muelle se encuentra siempre en posición vertical, tal y como muestra la figura adjunta. El sistema tiene por tanto dos grados de libertad, representados en este caso por los ángulos φ y θ que se indican en la misma figura.



La expresión de la energía potencial es:

$$V(\varphi,\theta) = -mga\left[\cos\varphi + \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta)\right] + \frac{1}{2}ka^2(\cos\varphi + \operatorname{sen}\theta - 1)^2 \tag{1}$$

2.- Las posiciones de equilibrio vienen dadas por los valores (φ,θ) que hacen extremo el potencial (1):

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = 0 = mga\operatorname{sen}\varphi - ka^2\operatorname{sen}\varphi(\cos\varphi + \operatorname{sen}\theta - 1) \tag{2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = 0 = -mg\frac{a}{2}(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) + ka^2\cos\theta(\cos\varphi + \operatorname{sen}\theta - 1) \tag{3}$$

La ecuación (2) admite la solución $\operatorname{sen}\varphi = 0 \ \Rightarrow \varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$. Introduciendo $\varphi = 0$ y $\varphi = \pi$ en la ecuación (3) se obtienen las expresiones:

$$\varphi_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 - \tan\theta_1 = \frac{2ka}{mg}\operatorname{sen}\theta_1 \tag{4}$$

$$\varphi_2 = \pi \quad \Rightarrow \quad 1 - \tan\theta_2 = \frac{2ka}{mg}(\operatorname{sen}\theta_2 - 2) \tag{5}$$

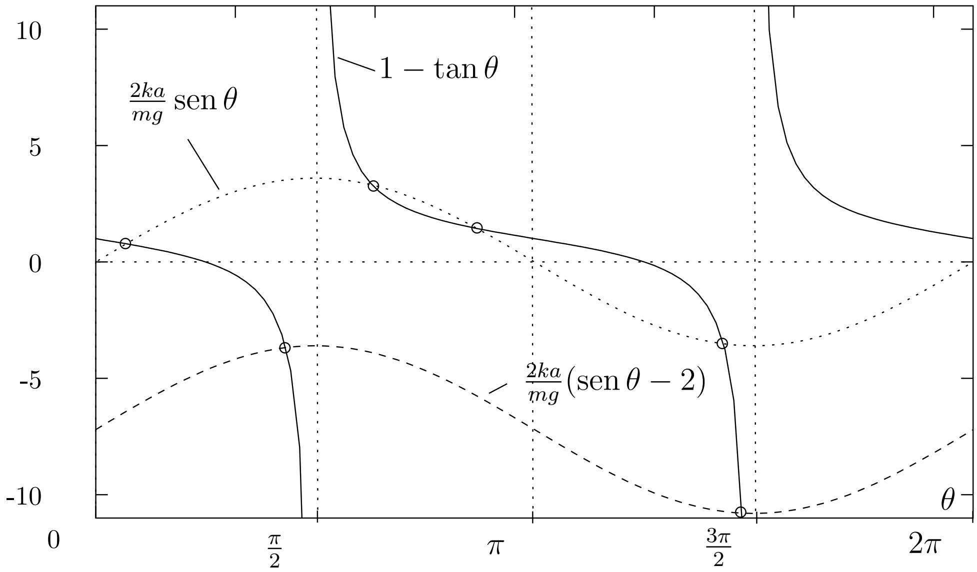


Figura 1: *Cálculo de posiciones de equilibrio correspondientes a $\varphi_1 = 0$ ($\alpha = (2ka/mg) \gtrsim 2{,}8$)*

Las ecuaciones anteriores se pueden resolver para θ de forma analítica sin más que poner $\operatorname{sen}\theta$ en función de $\tan\theta$, obteniéndose unas expresiones cuadráticas en $\tan\theta$. No obstante, es sencillo obtener información cualitativa de la solución dibujando los dos términos de las igualdades (4) y (5). Con la ayuda de la Figura 1 se puede deducir que el número de soluciones depende en algunos casos del valor del parámetro $\alpha = 2ka/mg$:

1. Para $\varphi_1 = 0$ existen dos soluciones si $\alpha \lesssim 2{,}8$, y cuatro si $\alpha \gtrsim 2{,}8$.
2. Para $\varphi_2 = \pi$ existen siempre dos soluciones.

Otra posible solución de (2) es:

$$mg - ka(\cos\varphi + \operatorname{sen}\theta - 1) = 0 \;, \tag{6}$$

que introducida en (3) resulta en la ecuación:

$$\cos\theta + \operatorname{sen}\theta = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} \theta_3 = 3\pi/4 \\ \theta_4 = -\pi/4 \end{cases}$$

Introduciendo los valores θ_3 y θ_4 en (6), se obtienen las relaciones:

$$\cos\varphi_3 = \underbrace{\frac{mg}{ak}}_{\beta} + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = f_1(\beta) \;; \quad \cos\varphi_4 = \underbrace{\frac{mg}{ak}}_{\beta} + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = f_2(\beta)$$

que se verifican para valores de $k > 0$ ($\beta > 0$) tales que $-1 \le f_1(\beta) \le 1$ y $-1 \le f_2(\beta) \le 1$. Es sencillo comprobar que ambas funciones f_1 y f_2 son positivas $\forall\beta > 0$.

La función f_1 se hace igual a la unidad para $\beta = 1/\sqrt{2}$, y la f_2 es siempre mayor que la unidad para $\beta > 0$. Por tanto, la única solución que existe de las dos es $\theta_3 = 3\pi/4 = 135°$ siempre que $k \ge mg\sqrt{2}/a$.

Nota: Es interesante interpretar físicamente el origen de la restricción en k que está asociada a la existencia de esta posición de equilibrio $\theta_3 = 135°$. En esta posición, la arista AB forma 45° con la horizontal, el punto B es el más bajo de la placa y está alineado en la vertical con su centro de masa, y el punto A queda a su derecha.

Para que esta configuración sea de equilibrio es necesario que la varilla OA esté descargada, ya que es la única manera de que la resultante horizontal de las fuerzas que actúan sobre la placa sea nula. Este hecho obliga a que el muelle tenga una rigidez mínima, de forma que sea capaz de contrarrestar el peso de la placa respetando la restricción de distancia cte. entre O y A.

3.- Si $k = mg/a$, solo existen las posiciones correspondientes a $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \pi$. Además, según lo explicado en el apartado anterior, cada una de estas posiciones está asociada a dos valores distintos del ángulo θ, ya que $\alpha = 2 < 2{,}8$. En el caso concreto de $\varphi_1 = 0$, se puede deducir de la Figura 1 que los dos valores asociados de θ se encuentran contenidos en los intervalos $[0, \frac{\pi}{4}]$ y $[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}]$ respectivamente.

La matriz hessiana se construye a partir de las derivadas segundas de la función potencial:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} &= mga\cos\varphi - ka^2\left[\cos 2\varphi + \cos\varphi(\operatorname{sen}\theta - 1)\right] \\
\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial \theta} &= -ka^2 \operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\
\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} &= mg\frac{a}{2}(\operatorname{sen}\theta + \cos\theta) + ka^2\left[\cos 2\theta - \operatorname{sen}\theta(\cos\varphi - 1)\right]
\end{aligned}
$$

Para el caso $\varphi_1 = 0$, la matriz hessiana tiene la expresión:

$$
\mathbf{H}_{\varphi_1=0} = mga\begin{pmatrix} 1-\operatorname{sen}\theta_1 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta_1 + \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\theta_1 + \cos\theta_1) \end{pmatrix}
$$

La estabililidad de esta posición viene determinada por el signo del término $H_{2,2}$, ya que como en cualquier caso $\theta_1 \neq \pi/2$, se verifica que $(1 - \operatorname{sen}\theta_1) > 0$. Puede comprobarse, con la ayuda de la Figura 1 que una de las posiciones asociada a $\varphi_1 = 0$ es estable y la otra inestable; concretamente:

$$
\cos 2\theta_1 + \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\theta_1 + \cos\theta_1)\begin{cases} > 0 & \text{para} \quad 0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{4} \\ < 0 & \text{para} \quad \frac{5\pi}{4} \leq \theta_1 \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}
$$

Para el caso $\varphi_2 = \pi$, la matriz hessiana tiene la expresión:

$$
\mathbf{H}_{\varphi_2=\pi} = mga\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta_2 - 3 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta_2 + \frac{1}{2}(5\operatorname{sen}\theta_2 + \cos\theta_2) \end{pmatrix}
$$

Esta posición es inestable, ya que en cualquier caso $(\operatorname{sen}\theta_2 - 3) < 0$.